Formulario

ARITMÉTICA

Academia

Raimondi

... siempre los primeros

Título de la Obra:

Formulario de Aritmética
Edición 2018

Academia Preuniversitaria
Antonio Raimondi E.I.R.L.
Plaza San Francisco Nº 138.
Telf.: (084)247458 y (084)224961
www.academiaraimondi.pe

Introducción

Introducción

La Aritmética es la rama de las matemáticas, cuyo objeto es el estudio de los números y las operaciones elementales hechas con ellos, tales como: suma, resta, multiplicación y división. De igual manera como en otras áreas de la matemática, el sentido de esta asignatura ha ido evolucionando con el desarrollo progresivo de las ciencias.

Sus orígenes se pueden rastrear hasta los comienzos de la matemática misma, y de la ciencia en general. Los registros más antiguos datan de la Edad de Piedra: huesos, palos, piedras talladas y escarbadas con muescas, presumiblemente con fines de conteo, de representación numérica y calendarios. Luego el gran avance de las civilizaciones mesopotámicas que permitieron un desarrollo más formal en la Antigua Grecia, con el refinamiento del rigor matemático.

La Corporación Educativa RAIMONDI de Cusco tiene el agrado de poner en consideración de todos los estudiantes del Cusco, el Perú y el Mundo, este Formulario de Aritmética que describe, en general, los temas que constituyen un curso de Aritmética de nivel pre-universitario.

Este formulario responde a una necesidad que hemos sentido agudamente todos los que nos avocamos a la enseñanza de las Matemáticas en las aulas de la academia y colegio RAIMONDI de Cusco. La experiencia nos ha demostrado que el aprendizaje de las matemáticas, requiere no solamente de conocimientos teóricos, sino fundamentalmente de la capacidad de resolver situaciones matemáticas, denominadas, ejercicios o problemas.

La práctica constante de resolver ejercicios y problemas es la única manera de profundizar y cimentar los conceptos teóricos bien aprendidos, es por ello que en el desarrollo de esta publicación, ustedes deberán tener en cuenta las sugerencias planteadas y analizarlas.

Tenga presente que el objetivo en el estudio de las Matemáticas no es mecanizarse, sino en saber aplicar correcta y lógicamente una determinada definición, propiedad o teorema a cada problema que se esté resolviendo. Solo así, el estudiante encontrará en las Matemáticas una recreación amena y ágil.

Víctor Paredes Aucasime
Promotor - Director

Índice de Contenidos

Lógica Proposicional

CONCEPTOS PRELIMINARES

La lógica estudia la forma de razonamiento. Es una disciplina que se utiliza para determinar si un argumento es válido, tiene aplicación en todos los campos del saber; en la filosofía, para determinar si un razonamiento es válido o no, ya que una frase puede tener diferentes interpretaciones; sin embargo la lógica permite saber el significado correcto. Los matemáticos usan la lógica, para demostrar teoremas e inferir resultados que puedan ser aplicados en investigaciones.

En la computación, para revisar programas y crear sus algoritmos, es utilizada en el diseño de computadoras. Existen circuitos integrados que realizan operaciones lógicas con los bits, gracias a estos se ha desarrollado las telecomunicaciones (telefonía móvil, internet, ...)

ENUNCIADO: Es cualquier frase u oración que expresa una idea.

PROPOSICIÓN: Son oraciones aseverativas que se pueden calificar como verdaderas o falsas. Se representan con las letras minúsculas del abecedario: p ; q ; r ; s.

Ejemplo:

* Túpac Amaru murió decapitado.
* $9 < 10$
* $45 = 3 - 2$

ENUNCIADO ABIERTO: Son enunciados que pueden tomar cualquiera de los 2 valores de verdad.

Ejemplo:

Si: $P(x): x > 6$
Se cumple que:

$P(9): 9 > 6$ es verdadero
$P(2): 2 > 6$ es falso

El valor de verdad de P(x) depende del valor de x, también, se le conoce como función proposicional.

CLASES DE PROPOSICIONES:

1. **Proposición Simple:** Son proposiciones que no tienen conjunciones gramaticales ni adverbio de negación.
   Ejemplo:
   * Cincuenta es múltiplo de diez.

2. **Proposición Compuesta:** Formada por dos o más proposiciones simples unidas por conectivos lógicos o por el adverbio de negación.
   Ejemplo:
   * 29 es un número primo y 5 es impar.

CONECTIVOS LÓGICOS: Símbolos que enlazan dos o más proposiciones simples para formar una proposición compuesta.
Los conectores lógicos que usaremos son:

SÍMBOLO	OPERACIÓN LÓGICA	SIGNIFICADO
$\sim$	Negación	No p
$\wedge$	Conjunción	p y q
$\vee$	Disyunción	p ó q
$\rightarrow$	Condicional	Si p, entonces q
$\leftrightarrow$	Bicondicional	p si y sólo si q
Δ	Disyunción Exclusiva	"o ...... o ......"

Observación: La negación es un conector monádico, afecta solamente a una proposición.

OPERACIONES LÓGICAS Y TABLAS DE VERDAD

La validez de una proposición compuesta depende de los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen y se determina mediante una tabla de verdad.

1. **Conjunción:** Vincula dos proposiciones mediante el conectivo lógico "y".

Tabla de Verdad

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

2. **Disyunción:** Vincula dos proposiciones mediante el conectivo lógico "o".

Tabla de Verdad

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3. **Disyunción Exclusiva:** Vincula dos proposiciones mediante el conectivo lógico: "o ...., o ...."

Tabla de Verdad

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. **Condicional:** Vincula dos proposiciones mediante el conectivo lógico:
"Si ...., entonces ...."

Tabla de Verdad

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

5. **Bicondicional:** Vincula dos proposiciones mediante el conectivo lógico:
"............. si y sólo si ...."

Tabla de Verdad

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

6. **Negación:** Afecta a una sola proposición. Es un operador monádico que cambia el valor de verdad de una proposición:

Tabla de Verdad

p	$\sim p$
V	F
F	V

Observación: La cantidad de filas en una tabla es:

$$\boxed{\#\,\text{filas} = 2^n}$$

Donde n es la cantidad de proposiciones simples.

Importante:

* Cuando los valores del operador principal son <u>todos verdaderos</u> se dice que el esquema molecular es tautológico.
* Se dirá que el esquema molecular es contradictorio si los valores del operador principal son <u>todos falsos</u>.
* Si los valores del operador principal tiene <u>por lo menos una verdad y una falsedad</u> se dice que es contingente o consistente.

LEYES DE ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

Son equivalencias lógicas que nos permiten reducir esquemas moleculares complejos y expresarlos en forma más sencilla. Las demostraciones de dichas leyes se hacen construyendo la tabla de verdad en cada caso.

Principales Leyes:

a. Ley de Idempotencia:

$$p \vee p \equiv p$$
$$p \wedge p \equiv p$$

b. Ley Conmutativa:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$
$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

c. Ley Asociativa:

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

d. Ley Distributiva:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

e. Ley de la Doble Negación:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

f. Leyes de Identidad:

$$p \vee V \equiv V \quad ; \quad p \vee F \equiv p$$
$$p \wedge V \equiv p \quad ; \quad p \wedge F \equiv F$$

g. Leyes del Complemento:

$$p \vee \sim p \equiv V$$
$$p \wedge \sim p \equiv F$$

h. Ley de la Bicondicional:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$
$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$
$$p \leftrightarrow q \equiv \sim (p \,\Delta\, q)$$

i. Ley del Condicional:

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

j. Ley de Absorción:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$
$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$
$$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$$

k. Leyes de "De Morgan":

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$
$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

CUANTIFICADORES:

1. Cuantificador Universal: Sea la función proposicional f(x) sobre un conjunto A, el cuantificador $\forall$ ("para todo") indica que todos los valores del conjunto A hacen que la función proposicional f(x) sea verdadera.

> $\forall$ se lee: "para todo"

Ejemplo:

Sea: $f(x): x^3 + 2 > 5$ donde $x \in \mathbb{N}$

La proposición cuantificada es:

$\forall x \in \mathbb{N};\ x^3 + 2 > 5$ es falsa.

2. Cuantificador existencial: Sea f(x) una función proposicional sobre un conjunto A el cuantificador (existe algún) indica que para algún valor del conjunto A, la función proposicional f(x) es verdadera.

> $\exists$ se lee: "Existe algún"

Ejemplo:

Sea $f(x): x^2 - 5 < 8$, donde: $x \in \mathbb{Z}^+$, la proposición:

$\exists x \in \mathbb{Z}^+ / x^2 - 5 < 8$ es verdadera:

CIRCUITOS LÓGICOS

Álgebra de Boole

El álgebra de Boole, denominada así en honor a su creador, George Boole, permite prescindir de la intuición y simplificar deductivamente afirmaciones lógicas que son todavía más complejas.

El Bit

Bit es el acrónimo de (vocablo fusionado) de Binary Digit o Dígito binario. Un bit es un dígito del sistema de numeración binario.

Mientras en el sistema de numeración decimal se usan diez dígitos, en el binario se usan sólo dos, el 0 y el 1. Un bit o dígito binario puede representar uno de esos dos valores, 0 ó 1.

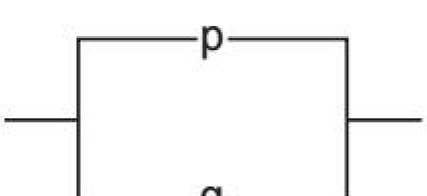
Se puede imaginar un bit como una bombilla que puede estar apagada (valor cero) o encendida (valor uno).

Un circuito conmutador puede estar solamente en dos estados estables: cerrado o abierto, así como una proposición puede ser verdadera o falsa, entonces podemos representar una proposición utilizando un circuito lógico:

1. **Circuito Serie:** Dos interruptores conectados en serie representan una conjunción.

   —p —— q —— < > $p \wedge q$

2. **Circuito Paralelo:** Dos interruptores conectados en paralelo representan una disyunción.

   < > $p \vee q$

3. **Simplificación de circuitos:** Se ha demostrado que el álgebra de circuitos es un álgebra booleana y por lo tanto las reglas relativas a la simplificación de las funciones booleanas se aplican al álgebra de circuitos.

Importante:

Recuerde que todo producto representa conmutadores en serie y la suma representa conmutadores en paralelo.

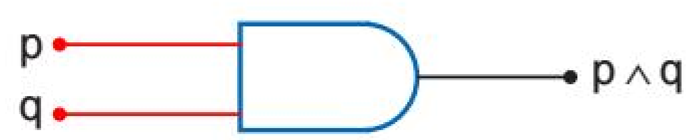
LÓGICA BINARIA

La lógica binaria trata con variables que toman 2 valores discretos y con operaciones que asumen significado lógico, para este propósito es conveniente asignar los valores de 1 y 0.

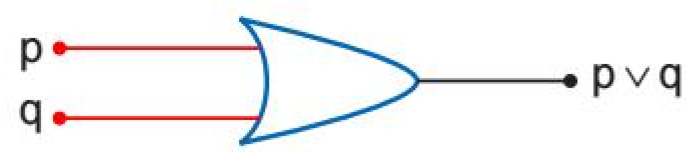
Principales Compuertas Lógicas

Una puerta lógica, o compuerta lógica es un dispositivo electrónico que representa la expresión física de un operador booleano en la lógica de conmutación.

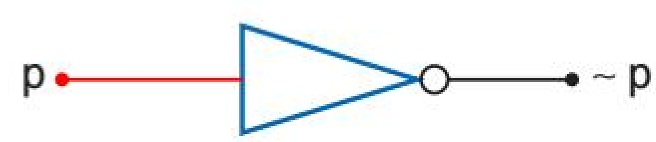
* Compuerta **AND** de dos entradas.



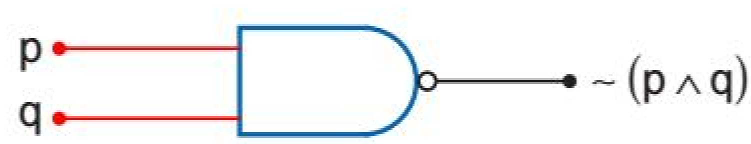
* Compuerta **OR** de dos entradas



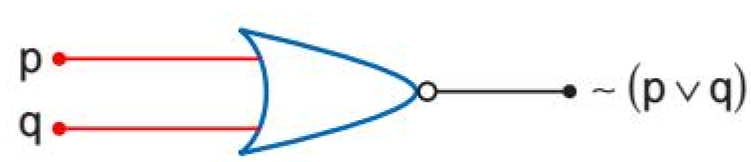
* Compuerta **NOT**



* Compuerta **NAND** de dos entradas



* Compuerta **NOR** de dos entradas



Capítulo II: Teoría de Conjuntos

CONCEPTOS PRELIMINARES

George Ferdinand Cantor, el creador de la teoría de conjuntos, nació en 1845 en Rusia. Vivió, estudió y enseñó en Alemania donde murió en 1918.

Publicó trabajos sobre funciones de variable real y las series de Fourier, introdujo conceptos de potencia de un conjunto, conjuntos equivalentes, tipo ordinal, número transfinito; que aportaron para el inicio del estudio de los problemas del infinito y la teoría de conjuntos.

NOCIÓN DE CONJUNTO

Conjunto: Concepto primitivo que no tiene definición, pero que nos da la idea de agrupación de objetos a los cuales llamaremos elementos del conjunto.

RELACIÓN DE PERTENENCIA

Si un objeto es elemento del conjunto, se dirá que pertenece ($\in$) a su conjunto, en caso contrario se dirá que no pertenece ($\notin$) a dicho conjunto.

Ejemplo: $A = \{4;\ 9;\ 16;\ 25\}$

$4 \in A \qquad 10 \notin A$

$16 \in A \qquad 21 \notin A$

CARDINAL DE UN CONJUNTO

Es la cantidad de elementos de un conjunto y se denota: n(A), así en el ejemplo anterior $n(A) = 4$.

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

a) **Por extensión o en forma tabular:** Es cuando se indican los elementos del conjunto.

$$A = \{*;\ \odot;\ \#;\ \ldots;\lozenge\}$$

b) **Por compresión ó en forma constructiva:** Es cuando se indica alguna característica particular y común a sus elementos.

$$A = \{f(x)\ /\ x \text{ cumple alguna condición}\}$$

Diagramas de Venn - Euler:

Son figuras geométricas planas cerradas que se utilizan para representar a los conjuntos, gráficamente.

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Inclusión ($\subset$)

Se dice que un conjunto A está incluido en B; si todos los elementos de A, están en el conjunto B. Es decir:

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B}$$

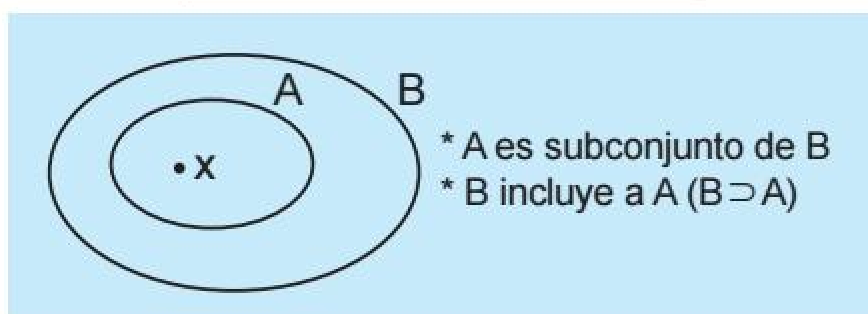


Diagrama Lineal

B
|
A

Igualdad

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos.
Es decir:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \ \wedge\ B \subset A$$

PRINCIPALES CONJUNTOS

Conjunto Vacío: Aquel que no tiene elementos, también se le llama nulo y se denota φ o { }

Conjunto Unitario: Aquel que tiene un solo elemento, también se le llama singleton.

Conjunto Universal: Conjunto referencial que se toma como base para el estudio de otros conjuntos contenidos en él y se denota por U.

Conjunto Potencia: Es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de otro conjunto A y se denota por P(A).

Ejemplo: A = {2 ; 8}
P(A) = { φ ;{2} ; {8} ; {2 ; 8}}

Observación: La cantidad de subconjuntos de un conjunto A es igual a $2^{n(A)}$.

Ejemplo:
A = {3 ; 5 ; 9} ; n(A) = 3
Entonces hay $2^3 = 8$ subconjuntos que son:
φ ; {3} ; {5} ; {9} ; {3 ; 5} ; {3 ; 9} ; {5 ; 9} y {3 ; 5 ; 9}
"A todos los subconjuntos de A, excepto A se les llama subconjuntos propios"

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Conjunto de los Números Naturales (N)

N = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ....}

Conjunto de los Números Enteros (Z)

Z = {........ ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; ....}

Conjunto de los Números Racionales (Q)

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} / m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z} \ \ , \ n \neq 0 \right\}$$

Conjunto de los Números Irracionales (I)

Son aquellos que tienen una representación decimal infinita no periódica y no pueden ser expresados como el cociente de 2 enteros.

Conjunto de los Números Reales (R)

Es la reunión de los racionales con los irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$$

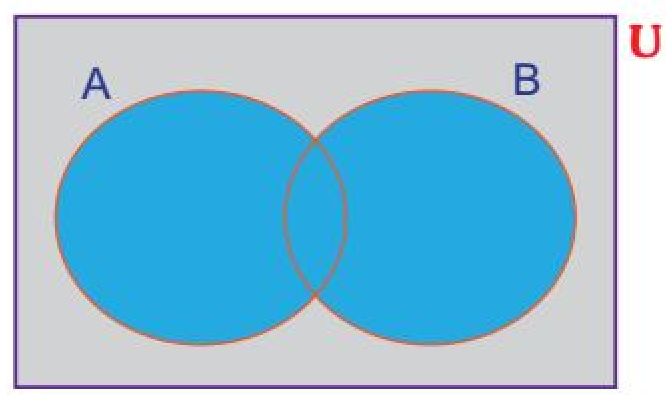
Conjunto de los Números Complejos (C)

$$\mathbb{C} = \left\{ a + bi / a \in \mathbb{R} \ \wedge \ b \in \mathbb{R} \ \ , \ i = \sqrt{-1} \right\}$$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

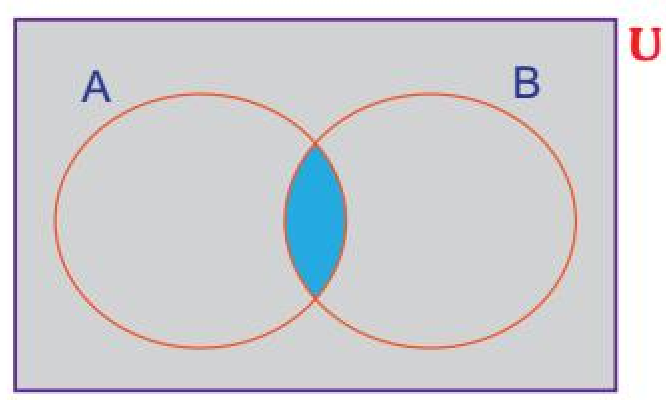
Unión $(\cup)$

$$A \cup B = \{x / x \in A \ \ \vee \ \ x \in B\}$$



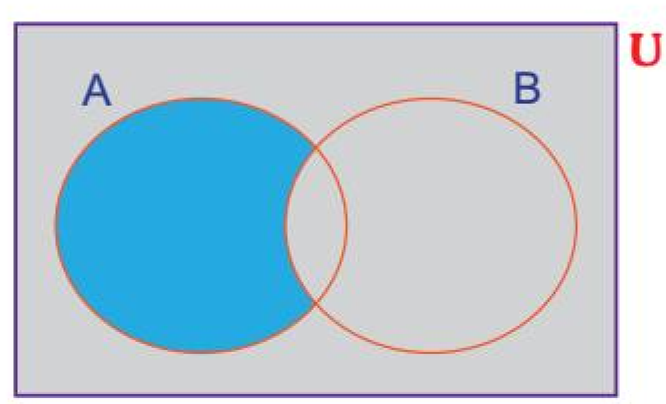
Intersección $(\cap)$

$$A \cap B = \{x / x \in A \ \ \wedge \ \ x \in B\}$$



Diferencia $(-)$

$$A - B = \{x / x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

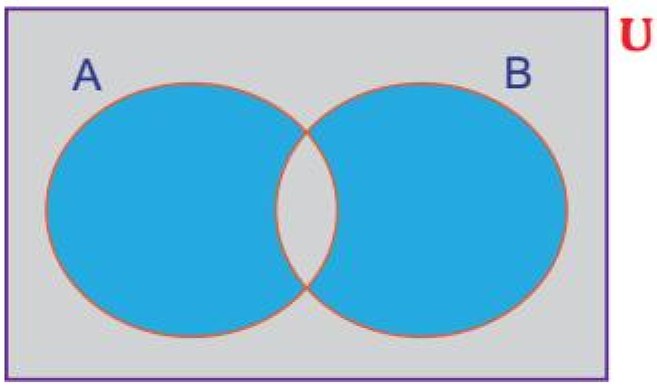


Observación:

A − B también se denota: A \ B

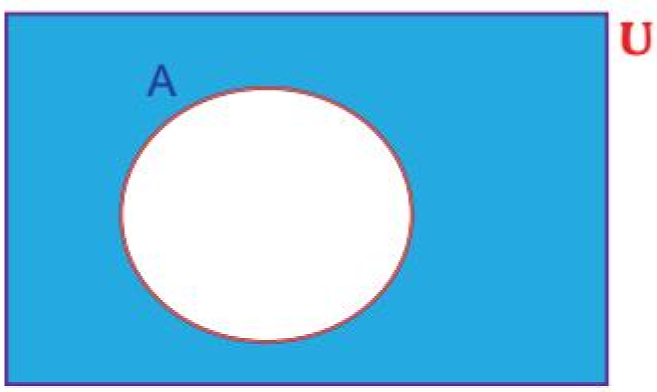
Diferencia Simétrica (Δ)

$$A \,\Delta\, B = \{x \,/\, x \in (A \cup B) \;\wedge\; x \notin (A \cap B)\}$$



Complemento (A^C , A')

$$A' = \{x/x \notin A\}$$

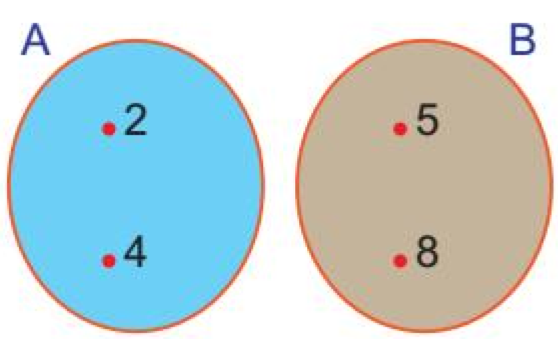


Observación: El complemento de A, se puede realizar respecto a cualquier conjunto, tal que $A \subset B$ y se denota: $C_B^A = B - A$

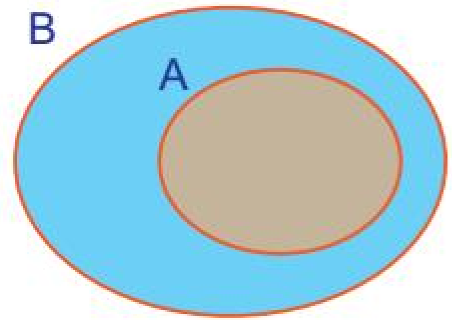
Se lee complemento de A respecto a B.

Importante:

Conjuntos Disjuntos: Son aquellos que no tienen elementos comunes:



Conjuntos Comparables: Cuando uno de ellos está incluido en el otro.



Conjuntos Equivalentes: Cuando tienen la misma cantidad de elementos.

A es equivalente a B entonces:

$$n(A) = n(B)$$

Conjunto Producto: También llamado producto cartesiano.

$$A \times B = \{(a;\ b) \,/\, a \in A \;\wedge\; b \in B\}$$

$\downarrow$

Par ordenado

Ejemplo:

$$A = \{1\ ;\ 4\ ;\ 5\} \quad B = \{8\ ;\ 11\}$$

$$A \times B = \{(1;8)\ ;\ (1;11)\ ;\ (4;8)\ ;\ (4;11)\ ;\ (5;8)\ ;\ (5;11)\}$$

ALGUNAS PROPIEDADES Y LEYES

1. Leyes distributivas Unión - Intersección:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2. Leyes de Morgan:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

3. $A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$

4. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Aritmética

5. $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

6. $A - B = A \cap B'$

7. $A' - B' = B - A$

8. $n[P(A) \cap P(B)] = n[P(A \cap B)]$

9. $n[P(A) \cup P(B)] = n[P(A)] + n[P(B)] - n[P(A) \cap P(B)]$
O también:
$n[P(A) \cup P(B)] = 2^{n(A)} + 2^{n(B)} - 2^{n(A \cap B)}$

10. $A \cup \varphi = A$
$A \cap \varphi = \varphi$

11. $A \cup U = U$
$A \cap U = A$

12. $(A')' = A$

13. $A \cup A' = U$
$A \cap A' = \varphi$

14. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$
$-n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

15. Ley de Absorción

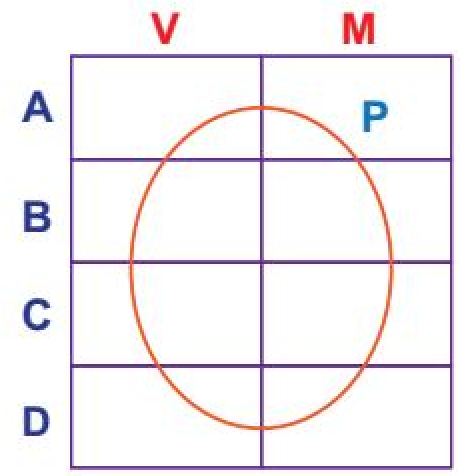
* $A \cup (A \cap B) = A$
* $A \cap (A \cup B) = A$
* $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$
* $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

GRÁFICO ESPECIAL PARA CONJUNTOS DISJUNTOS

Ejemplo de aplicación:

En un salón de clases se observa a 60 alumnos entre varones y mujeres; con las siguientes características:

* Algunos tienen 15 años.
* 18 tienen 16 años.
* 12 tienen 17 años.
* 40 postulan este año a la Universidad.



Leyenda:

V: Conjunto de los varones.
M: Conjunto de las mujeres.
P: Conjunto de los que postulan.
A: Conjunto de los alumnos con 15 años.
B: Conjunto de los alumnos con 16 años.
C: Conjunto de los alumnos con 17 años.
D: Conjunto de los alumnos con otra edad.

Nota: Este tipo de esquemas especiales reciben el nombre de "Diagramas de LEWIS CARROLL"

Estructura de datos para conjuntos disjuntos

En Informática, una estructura de datos para conjuntos disjuntos, es un conjunto de elementos particionados en un número de conjuntos disjuntos (no se solapan). Un algoritmo Unión-Buscar es un algoritmo que realiza dos importantes operaciones en esta estructura de datos:

Buscar: Determina a cual subconjunto pertenece un elemento. Esta operación puede usarse para verificar si dos elementos están en el mismo conjunto.

Union: Une dos subconjuntos en uno solo. La otra operación importante CrearConjunto es generalmente trivial, esta crea un conjunto con un elemento dado. Con estas tres operaciones, muchos problemas prácticos de particionamiento pueden ser resueltos.

Una aproximación común es seleccionar un elemento fijo de cada conjunto, llamado el representativo. Entonces Buscar(x) retorna el elemento representativo del conjunto al cuál x pertenece, y Unión toma como argumento dos elementos representivos de dos conjuntos respectivamente.

Capítulo III:

Razones y Proporciones

CONCEPTOS PRELIMINARES

En nuestra vida diaria, aparecen con mucha frecuencia algunas afirmaciones como:

* Las edades de Juana y Rosa son 18 años y 16 años respectivamente.
* Tengo 2 vinos: Uno de 800 ml y el otro de 640 ml.
* El sueldo de Víctor el mes pasado fue S/. 1500 y este mes será S/. 1800

Podemos observar que las edades, los volúmenes y el dinero pueden ser medidos o contados, a los cuales se les llama magnitudes escalares.

Observación: Hay magnitudes no medibles como la alegría, la memoria; por lo tanto no pueden expresarse numéricamente, por ello no las consideraremos en esta publicación.

CANTIDAD:

Es el resultado de la medición del estado de una magnitud escalar.

Ejemplo:
La altura del edificio Trilce Arequipa es 24 metros.

Magnitud: Longitud
Cantidad: 24 metros

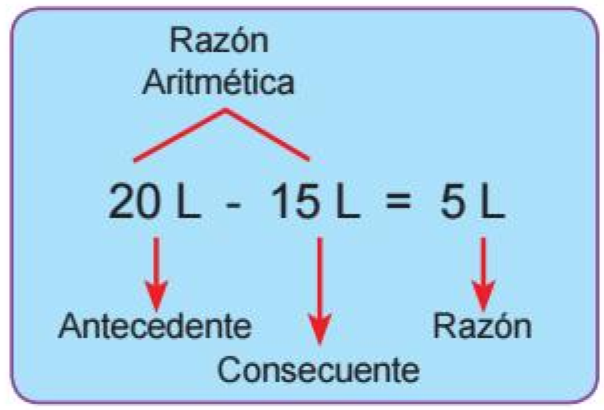
Se llama <u>magnitud</u> a todo aquello que puede ser medido o cuantificado; además, puede definirse la igualdad y la suma de sus diversos estados.

RAZÓN:

Es la comparación que existe entre dos cantidades de una magnitud, mediante las operaciones de sustracción y división.

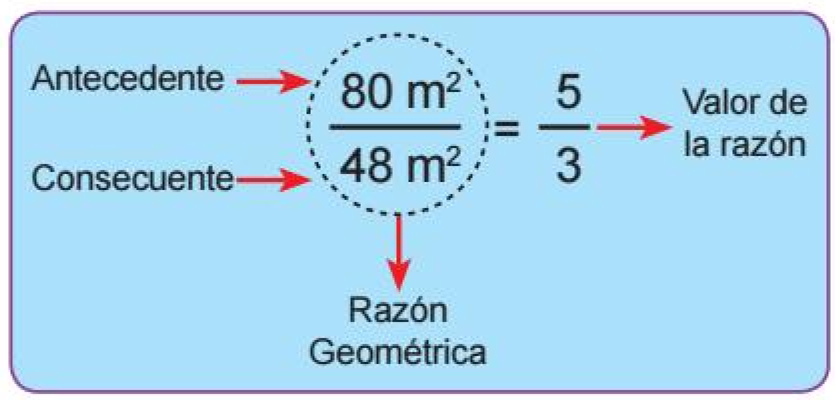
RAZÓN ARTIMÉTICA:

Ejemplo:
Dos toneles contienen 20 litros y 15 litros respectivamente, al comparar sus volúmenes.



RAZÓN GEOMÉTRICA:

Ejemplo:
Se comparan dos terrenos, cuyas superficies son: $80\ m^2$ y $48\ m^2$ y así obtenemos:



En conclusión:
Sean a y b dos cantidades:

	Aritmética	Geométrica
Razón	$a - b = d$	$\frac{a}{b} = k$

a: antecedente
b: consecuente
d y k: valores de las razones

PROPORCIONES MATEMÁTICAS

Son igualdades de dos razones de una misma especie.

PROPORCIÓN ARITMÉTICA

Definición de Razón Aritmética: La razón aritmética de dos cantidades es la diferencia de dichas cantidades. La razón aritmética se puede escribir colocando entre las dos cantidades el signo . o bien con el signo -. Así, la razón aritmética de 6 a 4 se escribe: 6-4.

El primer término de una razón aritmética recibe el nombre de antecedente y el segundo de consecuente.

Definición de Proporción Aritmética: Una "proporción aritmética" es una expresión de la relación de igualdad entre 2 razones aritméticas.

En general:

$$\boxed{a-b=c-d}$$

Donde:

a y d son los términos extremos.
b y c son los términos medios.

Ejemplo Aplicativo:
Las edades de 4 hermanos son: 24 años, 20 años, 15 años y 11 años; podemos decir:

24 años − 15 años = 9 años
20 años − 11 años = 9 años
Se puede establecer la siguiente igualdad:

Medios

24 - 15 = 20 - 11

Extremos

A esta expresión se llama **Proporción Aritmética.**

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Definición de Razón Geométrica: La razón geométrica es la comparación de dos cantidades por su cociente, donde se ve cuántas veces contiene una a la otra. Por ejemplo una razón 3 a 2 o 3/2, se puede leer como "3 sobre 2", o bien "3 es a 2".

El numerador de la razón (es decir, el 3) se llama antecedente y al denominador (el 2) se le conoce como consecuente.

Definición de Proporción Geométrica: Una proporción geométrica es la igualdad entre 2 razones geométricas.

En general:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$$

Donde:

a y d son los términos extremos.
b y c son los términos medios.

Ejemplo Aplicativo:
Se tiene 4 terrenos cuyas superficies son 9 m^2; 12 m^2; 15 m^2 y 20 m^2 al comprarlos se tiene:

$$\frac{9m^2}{12m^2}=\frac{3}{4} \quad \wedge \quad \frac{15m^2}{20m^2}=\frac{3}{4}$$

Se puede establecer la siguiente igualdad:

$$\frac{9}{12}=\frac{15}{20}$$

A la cual se le llama proporción geométrica
"9 es a 12, como 15 es a 20"

De donde:

$$\underbrace{9(20)}_{\text{Extremos}} = \underbrace{12(15)}_{\text{Medios}}$$

Nota:

"Cuando los medios son diferentes, la proporción se llama discreta, pero cuando los medios son iguales se llama continua".

Términos y Clasificación de las Proporciones

PROPORCIÓN ARITMÉTICA

$a - b = c - d$

d: cuarta diferencial

$a - b = b - c$

b: media diferencial
c: tercera diferencial

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

d: cuarta proporcional

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

b: media proporcional
c: tercera proporcional

Propiedades de Proporciones

Sea $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se cumple:

I. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$, $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$

II. $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$, $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

III. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

Serie de Razones Geométricas Equivalentes

Sean:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = ... = \frac{a_n}{c_n} = k$$

Una serie de razones geométricas equivalentes, iguales a un valor.

De aquí se pueden deducir las siguientes igualdades:

$$a_1 = c_1k \quad ; \quad a_2 = c_2k \quad ; \; .... \; ; \quad a_n = c_nk$$

Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

I. $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{c_1 + c_2 + ... + c_n} = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = ... = \frac{a_n}{c_n} = k$

II. $\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}{c_1 \cdot c_2 \cdot ... \cdot c_n} = k^n$

III. $\frac{a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m}{c_1^m + c_2^m + ... + c_n^m} = k^m$

Observación:

Donde "n" nos indica el número de razones.

Importante:

Si tenemos la siguiente proporción geométrica $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se cumple:

$$\boxed{\frac{a \pm kb}{b} = \frac{c \pm kd}{d}}$$

En toda proporción es posible sumar o restar múltiplos del denominador

Ejemplo:
Sea la siguiente serie:

$$\frac{4}{6} = \frac{12}{18} = \frac{18}{27} = k \text{ se cumple:}$$

I. $k = \frac{4+12+18}{6+18+27} = \frac{34}{51} = \frac{2}{3}$

II. $k^3 = \frac{4 \cdot 12 \cdot 18}{6 \cdot 18 \cdot 27}$ simplificando

$k^3 = \frac{8}{27} \rightarrow k = \frac{2}{3}$

III. $k^5 = \frac{4^5 + 12^5 + 18^5}{6^5 + 18^5 + 27^5} = \frac{2^5(2^5 + 6^5 + 9^5)}{3^5(2^5 + 6^5 + 9^5)}$

$k^5 = \frac{2^5}{3^5} \rightarrow k = \frac{2}{3}$

CONCEPTOS PRELIMINARES

El **promedio aritmético** es una medida de tendencia central, que tiene importancia en el caso en que los datos se junten aditivamente para obtener un total. Puede interpretarse como un valor que podría sustituir a cada uno de los datos.

El **promedio geométrico** por su parte, es relevante cuando los datos se usan multiplicativamente para obtener un resultado. Es así que puede interpretarse como un valor, que puede sustituir a cada dato.

El **promedio armónico** tiene importancia cuando usamos los datos sumando los recíprocos de cada uno de los datos y se puede interpretar con un valor que puede sustituir a cada dato para producir la misma suma de los recíprocos.

PROMEDIO

Dado un conjunto de datos diferentes es frecuente calcular un valor representativo de ellos, que este comprendido entre el menor y el mayor de ellos; a dicha cantidad se le llama: promedio o valor medio o simplemente media de los datos.

Sean "n" cantidades en sucesión creciente:

$$a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ a_3 \ ; \ .... \ ; \ a_n$$

El promedio de ellas será "p" si:

$$\boxed{a_1 < p < a_n}$$

PROMEDIOS MÁS UTILIZADOS

1. Promedio Aritmético o Media Aritmética (M. A.)

$$\boxed{\text{M.A.} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}}$$

Ejemplo de Aplicación:

Un vendedor independiente ganó en el Verano pasado: Enero S/. 800; Febrero S/. 1200 y Marzo S/. 1300. ¿Cuál fue su promedio mensual?

Resolución:
El promedio mensual viene a ser la Media Aritmética (M. A.) de dichas cantidades.

$$\text{M.A.} = \frac{\text{S/.}800 + \text{S/.}1200 + \text{S/.}1300}{3} = \text{S/.}1100$$

2. Promedio Geométrico o Media Geométrica (M.G.)

$$\boxed{\text{M.G.} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}}$$

Ejemplo de Aplicación:

En los últimos 5 meses, el gobierno actual registró una tasa de inflación mensual de 2%, 5%, 20%, 20% y 25%. Encuentre la tasa de inflación mensual promedio durante ese tiempo.

Resolución:
El promedio de dichas tasas viene a ser la media geométrica (M. G.) de dichas tasas.

$$\text{MG} = \sqrt[5]{2\% \times 5\% \times 20\% \times 20\% \times 25\%}$$

$$\text{MG} = 10\%$$

3. Promedio Armónico o Media Armónica (M.H.)

$$\boxed{\text{M.H.} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}$$

Ejemplo de Aplicación:

Un ama de casa gasta S/. 30, cada mes, durante 3 meses consecutivos, en la compra de aceite. El primer mes compró a S/. 10 el galón, el segundo mes lo compró a S/. 6 el galón y el tercer mes lo compró a S/. 3 el galón; diga entonces ¿cuál fue el costo promedio mensual?

Resolución:

$$\text{Costo Promedio} = \frac{\text{Costo Total}}{\#\text{ galones}}$$

Entonces el costo promedio es:

$$\frac{S/.30 + S/.30 + S/.30 +}{\frac{S/.30}{S/.10} + \frac{S/.30}{S/.6} + \frac{S/.30}{S/.3}} = \frac{S/.30}{18} = S/.5$$

Podemos observar que el costo promedio es la media armónica de S/.10 , S/.6 y S/.3 es decir:

$$M.H. = \frac{3}{\frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = 5$$

PARA DOS CANTIDADES a y b

$$M.A. = \frac{a+b}{2} \qquad M.H. = \frac{2ab}{a+b}$$

$$M.G. = \sqrt{ab}$$

PROPIEDADES

1. Para "n" cantidades se cumple:

$$M.A. \geq M.G. \geq M.H.$$

2. Para dos cantidades a y b se cumple:

$$M.A.(a,b) \cdot M.H.(a,b) = [M.G.(a,b)]^2$$

3. El error que se comete al tomar la media aritmética (M.A.), como media geométrica (M.G.) para dos números es:

$$M.A. - M.G. = \frac{(a-b)^2}{4(M.A. + M.G.)}$$

PROMEDIO PONDERADO (P.P.)

Es un caso particular del promedio aritmético, donde una o más cantidades se repiten dos o más veces.

Ejemplo de aplicación:

Al final del semestre académico, un alumno de la Universidad observa su récord de notas:

Curso	N° de créditos	Nota
Matemática I	6	12
Química I	4	14
Física I	3	15
Economía I	2	13

Determine su promedio.

Resolución:
El número de créditos indica las veces que se repite cada nota. Entonces el promedio ponderado es:

$$P.P = \frac{6 \cdot 12 + 4 \cdot 14 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 13}{6+4+3+2} = 13,2\widehat{6}$$

En general:

Datos: a_1 ; a_2 ; a_3 ; ... ; a_n
Pesos: p_1 ; p_2 ; p_3 ; ... ; p_n

El Promedio Ponderado (P.P.) es:

$$P.P. = \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + \ldots + a_np_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}$$

NOTA: Cuando no se mencione el tipo de promedio, consideraremos al Promedio Aritmético.

Aritmética

Capítulo V: Regla de Mezcla y Aleación

CONCEPTOS PRELIMINARES

Sabía Ud. que la atmósfera es una mezcla de gases que rodea un objeto celeste (como la Tierra) cuando éste cuenta con un campo gravitatorio suficiente para impedir que escape. La atmósfera terrestre está constituida principalmente por Nitrógeno (78%) y Oxígeno (21%). El 1% restante lo forman el Argón (0,9%), el Dióxido de Carbono (0,03%), distintas proporciones de vapor de agua, y trazas de Hidrógeno, Ozono, Metano, Monóxido de Carbono, Helio, Neón, Kriptón y Xenón.

También existen otros tipos de mezcla, la que realizan los comerciantes con la finalidad de obtener utilidades, la forma de calcular el precio común a ellos será motivo de estudio en el presente capítulo.

MEZCLA: Es la reunión o agregación de 2 o más ingredientes o sustancias entre las cuales no hay interacción química.

Precio Unitario: Es el costo de cada unidad de medida del ingrediente.

Precio Medio: Es el precio de costo de una unidad de medida de mezcla. Se obtiene dividiendo el costo total de los ingredientes entre la cantidad total de unidades de medida de mezcla.

$$\boxed{P_m = \frac{\text{Costo Total}}{\text{Cantidad Total}}}$$

Ejemplo:
Se mezclan a tipos de arroz, según la siguiente relación:

Arroz tipo A: 9 Kg de S/. 3
Arroz tipo B: 5 Kg. de S/. 2,2
Arroz tipo C: 6 Kg. de S/. 1,5

Calcule el precio medio de la mezcla.

Resolución:
El precio medio es el precio de costo de un Kg. de mezcla, que se obtiene dividiendo el costo total de los ingredientes entre la cantidad de mezcla obtenida.

$$P_m = \frac{9 \times S/.3 + 5 \times S/.2{,}2 + 6 \times S/.1{,}5}{9+5+6} = S/.2{,}35$$

Se puede observar que el precio medio es el promedio ponderado de los precios unitarios.
En general, para "n" ingredientes:

Precios:	P_1	P_2	P_3	....	P_n
Cantidad:	C_1	C_2	C_3	....	C_n

$$\boxed{P_m = \frac{C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 + \ldots + C_nP_n}{C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n}}$$

REGLA DEL ASPA

Se utiliza para determinar la proporción en la que deben mezclarse los ingredientes para obtener un determinado precio medio.

Ejemplo:
¿En qué relación se debe mezclar café de S/. 20 el kg. con café de S/. 30 el kg. para obtener café de S/. 23?

Resolución:

Cantidades	Precios		Diferencias
C_1	20	23	30 - 23
C_2	30		23 - 20

Se cumple:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{30-23}{23-20} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{7}{3}$$

Se deben mezclar en la relación de 7 a 3.

Propiedad

Cuando los precios de los ingredientes son diferentes se cumple que:

$$\boxed{\text{Precio Menor} < \text{Precio Medio} < \text{Precio Mayor}}$$

Observación: Como el precio medio es el precio de costo; lo que se gana en algunos ingredientes, se pierde en los otros.

$$\boxed{\text{Ganancia Aparente} = \text{Pérdida Aparente}}$$

MEZCLA ALCOHÓLICA

Es una mezcla de alcohol y agua.

Grado de una Mezcla Alcohólica: Es el tanto por ciento de alcohol puro presente en la mezcla. Se obtiene utilizando la siguiente expresión:

$$\boxed{\text{Grado} = \frac{\text{Vol. Alcohol}}{\text{Vol. Total}} \times 100\%}$$

También se puede expresar en grados.

ALEACIÓN

Es la mezcla de distintos tipos de metales mediante un proceso metalúrgico denominado fundición.

Metal fino:
Son metales como el oro; plata y platino.

Metal ordinario:
Son los metales no preciosos, como el cobre, zinc, etc.

Ley de una aleación:

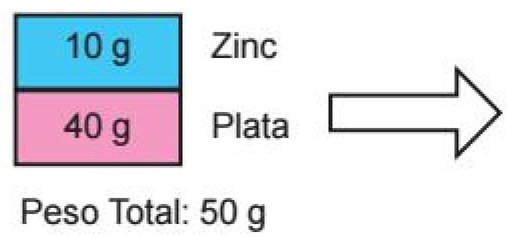
Es la relación que existe entre el peso del metal precioso o fino y el peso total de la aleación. Indica qué fracción de la mezcla es de metal fino.

$$\boxed{\text{Ley} = \frac{\text{Peso de metal fino}}{\text{Peso total de la aleación}}}$$

Ejemplo:

Se tiene una aleación constituida por 40 g. de plata y 10 g. de zinc. ¿Cuál es la ley de la aleación?

Resolución:



$$\boxed{\text{Ley} = \frac{\text{Peso de plata}}{\text{Peso total}}}$$

$$\text{Ley} = \frac{40}{50} = 0{,}80$$

Liga de una aleación

Si se quiere dar la relación del metal ordinario y peso total se utiliza la siguiente expresión:

$$\boxed{\text{Liga} = \frac{\text{Peso de metal ordinario}}{\text{Peso total}}}$$

Se cumple:

$$\boxed{\text{Ley} + \text{Liga} = 1}$$

Número de kilates de una aleación

Es de común uso el número de kilates para indicar qué parte de la aleación es de oro puro. Para lograr esto, se considera que el oro puro es de 24 kilates se cumple:

$$\boxed{\frac{\text{N° de kilates}}{24} = \frac{\text{Peso de metal fino}}{\text{Peso Total}}}$$

También:

$$\boxed{\text{N° de kilates} = 24 \times \text{Ley}}$$

Capítulo VI: Magnitudes Proporcionales

CONCEPTOS PRELIMINARES

Existen distintas magnitudes, algunas de las cuales se pueden contar, otras se pueden medir. Cuando preguntamos ¿Cuántos? pensamos en la cantidad de objetos de un conjunto discreto y cuando preguntamos ¿Cuánto? pensamos en medir, es decir, el objeto es un conjunto continuo. En este capítulo, estudiaremos las dos maneras más comunes de relacionar los valores de 2 magnitudes.

MAGNITUD

Propiedad de la materia o de un fenómeno físico o químico suceptible de variación, es decir puede aumentar o disminuir.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

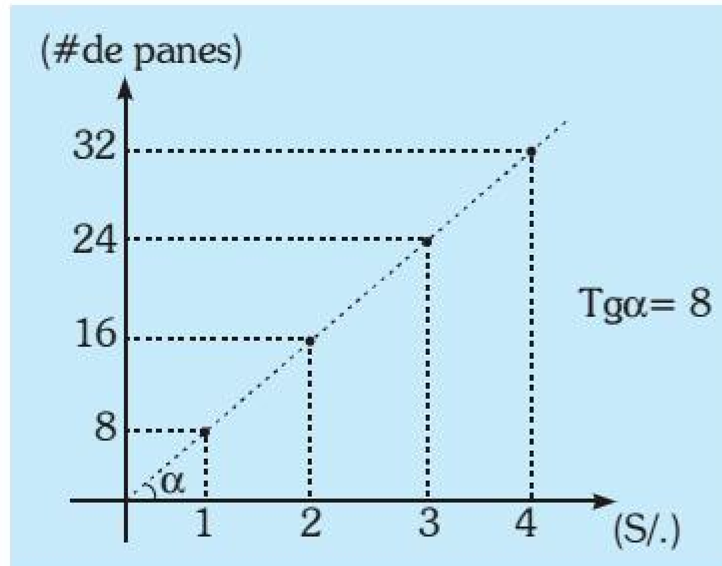
Suponga que dos magnitudes están relacionadas de modo que al duplicar el valor de una de ellas, el valor de la otra también se duplica; al triplicar la primera, la segunda también queda multiplicada por tres, etc. Siempre que sucede esto, decimos que existe entre ambas magnitudes, una relación de proporción directa. Por ejemplo, si contamos la cantidad de panes que se pueden comprar con cierta cantidad de soles:

SOLES	#PANES
1 sol	8 panes
2 soles	16 panes
3 soles	24 panes
4 soles	32 panes

Además, se cumple que el cociente de los valores correspondientes de las magnitudes es constante

$$\frac{\#\text{panes}}{\text{soles}} = \frac{8}{1} = \frac{16}{2} = \frac{24}{3} = \frac{32}{4} = 8 \ \text{(constante)}$$

Si graficamos los valores correspondientes de las magnitudes en el plano.



Los puntos se encuentran sobre una recta que pasa por el origen.

Observación: La pendiente de la recta es igual a la constante de proporcionalidad. Este valor se puede calcular como la tangente del ángulo agudo que forma la recta con el eje X positivo.

En general:

$$\boxed{A \ \text{D.P.} \ B \rightarrow \frac{\text{Valor de A}}{\text{Valor de B}} = \text{constante}}$$

Observación:

$\left.\begin{matrix} A \ \ DP \ \ B \\ A \ \ \alpha \ \ B \end{matrix}\right\}$ se lee A es directamente proporcional a B

Se puede afirmar que el valor de una de las magnitudes depende linealmente de la otra:

Constante (pendiente de la recta)

$$\boxed{f_{(x)} = Kx}$$

Valor de A

Valor de B

Es importante observar que, al aplicar un modelo matemático para analizar una situación concreta, debemos tener en cuenta los límites de la validez del modelo.

En particular, cuando afirmamos que una magnitud A es proporcional a otra magnitud B, debemos dejar claro (explícita o tácitamente) que esto se da dentro de ciertos límites de variación para x e y. Por ejemplo la conocida "Ley de Hooke" dice que la deformación sufrida por un cuerpo elástico (por ejemplo, un resorte) es directamente proporcional a la (Intensidad de la) fuerza empleada.

$$\boxed{\text{deformación} = K \times (\text{fuerza})}$$

La validez de esta ecuación como modelo matemático para representar al fenómeno está sujeta a restricciones la fuerza no puede ser muy pequeña porque entonces aún siendo positiva, no sería suficiente para deformar el resorte; en este caso tendríamos deformación = 0 con una fuerza > 0, luego no valdría el modelo d = K . F, tampoco se puede tomar F muy grande porque el resorte se destruiría y poco antes de eso su deformación no sería proporcional a F.

PROPORCIONALIDAD INVERSA

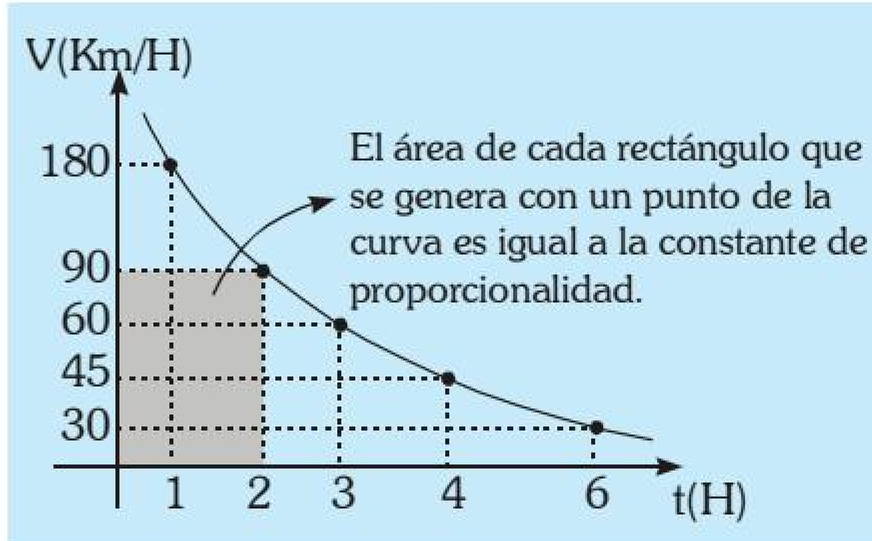
Supongamos que una persona realiza un viaje por automóvil en una distancia de 180km. entre una ciudad y otra. Sea V la velocidad constante del auto y t el tiempo transcurrido en el viaje.

V(km/h)	t(h)
30	6
45	4
60	3
90	2

Se puede observar que al duplicar la velocidad, el tiempo se divide entre 2, y al triplicar la velocidad, el tiempo se reduce a su tercera parte. Además se cumple que el producto de los valores correspondientes de las magnitudes es constante.

$$V \times t = 30 \times 6 = 45 \times 4 = 60 \times 3 = 90 \times 2 = \text{constante}$$

La gráfica de los valores correspondientes de las magnitudes en el plano es:



Los puntos se encuentran sobre una rama de hipérbola equilátera.

En general:

$$\boxed{A\ \text{IP}\ B \rightarrow (\text{Valor de A})\ (\text{Valor de B}) = \text{constante}}$$

Esta relación se puede expresar:

$$\boxed{\underbrace{f(x)}_{\text{Valor de A}} = \frac{K}{x}} \quad \begin{array}{l} K \rightarrow \text{Constante} \\ x \rightarrow \text{Valor de B} \end{array}$$

PROPIEDADES:

I. Si:

$$A\ \text{IP}\ B \Rightarrow A\ \text{DP}\ \frac{1}{B}$$

II. Si:

A DP B $\wedge$ B DP C $\rightarrow$ A DP C
A DP B $\wedge$ B IP C $\rightarrow$ A IP C
A IP B $\wedge$ B DP C $\rightarrow$ A IP C
A IP B $\wedge$ B IP C $\rightarrow$ A DP C

III. Si:

A DP B $\Rightarrow$ A^n DP B^n

A IP B $\Rightarrow$ A^m IP B^m

IV. Si:
A DP B (Cuando C es constante)
y A IP C (Cuando B es constante)
Se cumple:

$$\boxed{\frac{AC}{B} = \text{constante}}$$

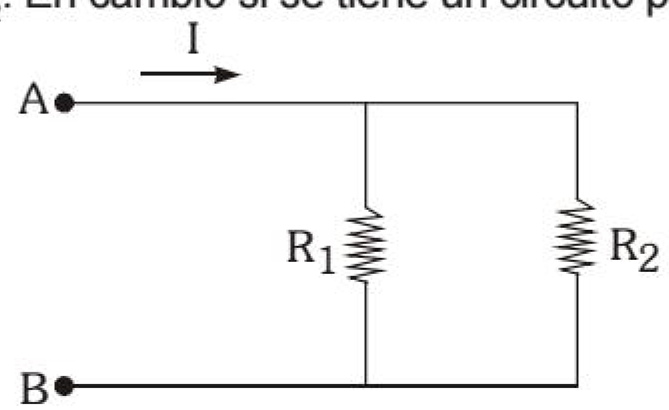
Capítulo VII: Reparto Proporcional

CONCEPTOS PRELIMINARES

* El 29 de Junio fueron de pesca Pedro, Juan y Pablo. Consiguieron 8, 9 y 10 pescados, respectivamente, que compartieron en partes iguales con Jesús, el cual muy bondadoso, entregó 27 panes para que se repartan entre ellos. ¿Cuántos panes le corresponden a Pedro? (No se apresure, la respuesta no es 8)

* Cuando se tiene un circuito resistivo en serie como:

La tensión entre los puntos A y B se reparte directamente proporcional a los valores de las resistencias R_1 y R_2. En cambio si se tiene un circuito paralelo.



La corriente I se reparte inversamente proporcional a los valores de las resistencias R_1 y R_2.

Así como este ejemplo, el reparto proporcional tiene su aplicación en la Economía, Ingeniería, Medicina, Agricultura, etc.

REPARTO PROPORCIONAL:

Consiste en repartir una cantidad en forma proporcional a ciertos números denominados índices de reparto.

CLASES DE REPARTO:

1. Reparto Proporcional Simple:

Es aquel reparto que se realiza en forma proporcional a un solo grupo de índices, este reparto puede ser de dos tipos:

A. Reparto Simple Directo: Al efectuar este tipo de reparto, se obtienen partes que son directamente proporcionales a los índices.

En general repartir N DP a los índices $a_1 ; a_2 ; .... ; a_n$

Se cumple que las partes obtenidas: $P_1 ; P_2 ; P_3 ; .... ; P_n$ son DP a los índices.

$$\frac{P_1}{a_1} = \frac{P_2}{a_2} = \frac{P_3}{a_3} = ... = \frac{P_n}{a_n} = \underbrace{K}_{\text{Constante}}$$

Como: $N = P_1 + P_2 + ... P_n$

$$\Rightarrow N \begin{cases} a_1K \\ a_2K \\ a_3K \\ \vdots \\ a_nK \end{cases} \text{Partes}$$

$$\Rightarrow N = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)K$$

$$\therefore \boxed{K = \frac{N}{(a_1 + a_2 + ... + a_n)}}$$

La constante de reparto es igual a la relación de la cantidad a repartir y la suma de los índices.

Ejemplo:
Repartir S/. 2500 DP a las edades de 3 hermanos que son: 6 , 7 y 12 años.

Resolución:

$$\begin{array}{c} \quad \textbf{PARTES} \quad \textbf{D.P.} \\ 2500\left\{\begin{array}{lcl} A & : & 6 \\ B & : & 7 \\ C & : & 12 \end{array}\right. \end{array} \Rightarrow 6K+7K+12K=2500$$

La constante: $K=\dfrac{2500}{(6+7+12)}=100$

Luego:
$A = 6(100) = 600$
$B = 7(100) = 700$
$C = 12(100) = 1200$

NOTA: Si los índices de reparto se multiplican por una constante, se obtienen las mismas partes, o sea el reparto no varía.

Ejemplo:
Si repartimos 200 DP a 2 , 3 y 5
la constante es $\dfrac{200}{(2+3+5)}=20$ entonces las partes son:
$2(20) = 40$; $3(20) = 60$ y $5(20) = 100$

Multipliquemos por 2 a todos los índices y hagamos de nuevo el reparto. La constante sería:

$$\frac{200}{(4+6+10)}=10$$

(es la mitad de la constante anterior)

Calculemos las partes:
$4(10) = 40$; $6(10) = 60$; $10(10) = 100$
Se puede observar que las partes no han variado.

B. Reparto Simple Inverso: Al efectuar este tipo de reparto, se obtienen partes que son inversamente proporcionales a los índices.

En general repartir N IP a los índices

$$a_1 \ ; \ a_2 \ ; \ a_3 \ ; \ .... \ ; \ a_n$$

Se cumple que las partes obtenidas:

$P_1 ; P_2 ; P_3 ; .... ; P_n$ son IP a los índices.

$$P_1 \cdot a_1 = P_2 \cdot a_2 = P_3 \cdot a_3 = ...$$

$$.. = P_n \cdot a_n = \overset{\text{Constante}}{K}$$

Como: $N = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n$

$$\Rightarrow N = \frac{K}{a_1}+\frac{K}{a_2}+\frac{K}{a_3}+......+\frac{K}{a_n}$$

$$\Rightarrow N \begin{array}{l} \text{Partes} \\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{a_1}\cdot K \\ \dfrac{1}{a_2}\cdot K \\ \dfrac{1}{a_3}\cdot K \\ \vdots \\ \dfrac{1}{a_n}\cdot K \end{array}\right. \end{array}$$

$$\Rightarrow K = \frac{N}{\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+...+\dfrac{1}{a_n}\right)}$$

Ejemplo:

Repartir 6300 en partes IP a $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{1}{7}$ y $\dfrac{1}{10}$

Resolución:

$$\begin{array}{c} \qquad \textbf{PARTES} \quad \textbf{IP} <> \textbf{DP} \\ 6300\left\{\begin{array}{lccc} A & : & \dfrac{1}{4} & 4 \\ B & : & \dfrac{1}{7} & 7 \\ C & : & \dfrac{1}{10} & 10 \end{array}\right. \end{array}$$

$\Rightarrow$ $4K+7K+10K=6300$

$$K=\frac{6300}{4+7+10}=300$$

Aritmética

Luego:
A = 4(300) = 1200
B = 7(300) = 2100
C = 10(300) = 3000

2. **Reparto Proporcional Compuesto:**
Este tipo de reparto se realiza proporcionalmente a varios grupos de índices.

Los repartos proporcionales compuestos pueden ser:

DIRECTOS: Si el reparto se realiza en partes directamente proporcionales a los índices.

INVERSOS: Si el reparto se realiza en partes inversamente proporcionales a los índices.

MIXTOS: Si el reparto se realiza en partes directamente proporcionales a algunos índices e inversamente proporcionales a otros.

Para efectuar un reparto compuesto se siguen los siguientes pasos:

1º Se convierte las relaciones IP a DP invirtiendo los índices (si los hubiera)

2º Se multiplican los índices correspondientes de cada grupo.

3º Se efectúa el reparto proporcional simple directo resultante.

REGLA DE COMPAÑÍA

Es un caso particular del reparto proporcional, consiste en repartir las ganancias o pérdidas que se producen en una sociedad mercantil o compañía, entre los socios de la misma en forma DP a los capitales y a los tiempos que los mismos permanecen en el negocio.

Ejemplos Aplicativos:

1. Tres amigos se asocian para comprar un camión aportando capitales de 16000; 14000 y 10000 dólares. Si por cada mes de alquiler del camión perciben 3700 dólares.
¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Resolución:
Como el tiempo es el mismo para todos, entonces se reparte la ganancia DP a los capitales aportados.
Entonces:

$$\frac{G_1}{16000}=\frac{G_2}{14000}=\frac{G_3}{10000}=\frac{G_1+G_2+G_3}{16000+14000+10000}$$

$$=\frac{3700}{40000}$$

$$G_1=16000\left(\frac{3700}{40000}\right)=1480$$

$$G_2=14000\left(\frac{3700}{40000}\right)=1295$$

$$G_3=10000\left(\frac{3700}{40000}\right)=925$$

2. Dos profesores de Aritmética: Javier y César escriben un libro para lo cual trabajan en distintos horarios. Si el primero trabaja 9 horas diarias en el proyecto y el segundo 6 horas más. ¿Cuál será el beneficio que obtiene el segundo si en total percibieron 900 soles?

Resolución:
Notamos que el beneficio de cada uno de ellos es proporcional al tiempo.

$$\frac{G_1}{9}=\frac{G_2}{15}=\frac{G_1+G_2}{9+15}=\frac{900}{24}$$

$$G_1=9\left(\frac{900}{24}\right)=337,5$$

$$G_2=15\left(\frac{900}{24}\right)=562,5$$

Es decir Javier recibe S/. 337,50 y César recibe S/. 562,50

CONCEPTOS PRELIMINARES

Una de las aplicaciones de proporcionalidad más antigua es la Regla de Tres que resulta al comparar dos o más magnitudes.

Cuando cuatro cantidades forman una proporción y una de ellas es desconocida, la operación que tiene por objeto determinar esta incógnita en función de las cantidades conocidas lleva el nombre de Regla de Tres Simple.

LA REGLA DE TRES

Es una forma de resolver problemas de proporcionalidad entre tres o más valores conocidos y una incógnita. En ella se establece una relación de linealidad (proporcionalidad) entre los valores involucrados.

Regla de tres es la operación de hallar el cuarto término de una proporción conociendo los otros tres.

La regla de tres más conocida es la regla de tres simple directa, aunque también existe la regla de tres simple inversa y la regla de tres compuesta.

Regla de Tres Simple

Es cuando se comparan dos magnitudes proporcionales. Pueden ser directas o inversas.

1. **Directa:** Cuando las magnitudes comparadas son directamente proporcionales.

Esquema:

1era. magnitud		2da. magnitud
a	______	b
x	______	c

Si son magnitudes directamente proporcionales se cumple:

Ejemplo:
Un grifo arroja en 12 minutos 640 litros de agua. ¿Cuántos litros arrojará en 75 minutos?

Resolución:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{c} \rightarrow \boxed{bx = ac}$$

$$12x = 75(640)$$

$$\boxed{x = 4000\ell}$$

¡Observe que la multiplicación es en aspa!

2. **Inversa:** Cuando las magnitudes comparadas son inversamente proporciona-les:

Esquema:

1era. magnitud		2da. magnitud
a	______	b
x	______	c

Si son magnitudes inversamente proporcionales se cumple:

$$\boxed{a \cdot b = x \cdot c}$$

Ejemplo:
24 sastres pueden hacer un trabajo en 30 días, ¿Cuántos sastres habrá que aumentar para hacer dicho trabajo en 20 días?

Resolución:

Sastres		días	
24	______	30	
x	______	20	Es una R3SI

$$20x = 30(24)$$

$$\boxed{x = 36}$$

Entonces hay que aumentar 36 − 24 = 12 sastres

¡Observe que la multiplicación es en línea!

REGLA DE TRES COMPUESTA

Es cuando se comparan más de dos magnitudes es decir al menos 3 magnitudes (6 valores correspondientes)

Método de las proporciones:

I. Trasladar la información a la hoja de cálculo.
II. Se ubica la magnitud de la incógnita, la cual se compara con c/u de las otras magnitudes (deberá considerar que las otras magnitudes que no intervienen permanecen constantes)
III. En caso que la comparación determine que las magnitudes son DP, cambie la posición de los valores, escribiéndolos como una fracción.
IV. En caso que la comparación determine que las magnitudes son IP, mantenga la posición original de los valores (en fracción).
V. La incógnita se determina del siguiente modo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \text{I.P.} & & & \\ A & — & B & — & C & — & D \\ A_1 & — & x & — & C_1 & — & D_1 \\ & \text{DP} & & & \text{DP} & & \end{array}$$

Se cumple:

$$\boxed{\frac{x}{B}=\frac{A_1}{A}\cdot\frac{C}{C_1}\cdot\frac{D_1}{D}}$$

Ejercicio de aplicación 1:

50 peones siembran un terreno de 500 m^2 de superficie en 6 días de 6 h/d; entonces, el número de días que necesitan 20 peones doblemente rápidos para sembrar un terreno de 800 m^2 de superficie trabajando 4 horas al día, es:

Resolución:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{IP} & & \\ \text{Peones} & & m^2 & & \text{horas} \\ 50(1) & — & 500 & — & 6(6) \\ 20(2) & — & 800 & — & x(4) \\ & & & \text{DP} & \end{array}$$

Luego:

$$\frac{4x}{36}=\frac{5\cancel{0}}{4\cancel{0}}\cdot\frac{8\cancel{00}}{5\cancel{00}}$$

$$x=\frac{\cancel{36}(5)(8)}{4(4)(5)}$$

$$\boxed{x = 18 \text{ días}}$$

Ejercicio de aplicación 2:

5 hornos consumen 30 toneladas de carbón en 20 días; 3 hornos más consumirán en 25 días una cantidad de carbón igual a:

Resolución:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{DP} & & & \\ \text{Hornos} & & \text{TN} & & \text{días} \\ 5 & — & 30 & — & 20 \\ 8 & — & x & — & 25 \\ & & & \text{DP} & \end{array}$$

Se cumple:

$$\frac{x}{30}=\frac{8}{5}\cdot\frac{25}{20}$$

$$\boxed{x = 60 \text{ TN}}$$

Capítulo IX: Tanto por Cuanto

CONCEPTOS PRELIMINARES

Una de las aplicaciones más utilizadas de la proporcionalidad es el porcentaje, que tiene su origen en el tanto por ciento.

¿Qué significan la frase "por ciento"?

Significan una cierta parte de cada ciento de una cantidad cualquiera. Así el 4 por ciento significa 4 de cada 100 y puede ser 4 soles de cada 100 soles, 4 kilos de cada 100 kilos y se puede escribir.

$$\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$$

Cuando la parte fraccionaria de un total se expresa en centésimas, se dice que es un porcentaje del total. La palabra porcentaje se emplea para referirse al método del cálculo por cientos.

TANTO POR CUANTO

El 5 por 8 de una cantidad, significa dividir dicha cantidad en 8 partes iguales y tomar 5 de ellas.

Ejemplo Aplicativo:

El 5 por 8 de 120.

 ⟶ 8 partes iguales

Si 120 lo dividimos en 8 partes iguales, tomando 5 de ellas o sea: $5\left(\frac{120}{8}\right)=\frac{5}{8}\times 120=75$

Es decir, el A por B de N es: $\boxed{\frac{A}{B}\cdot N}$

Cuando B = 100 se lee A por 100 de N y se denota por A% de N y se escribe:

$$\boxed{\frac{A}{100}\cdot N}$$

Ejemplo Aplicativo:

El 20% de 75 es:

$$\underbrace{\frac{20}{100}}_{\text{Tanto por ciento}}\cdot 75=\underbrace{15}_{\text{Porcentaje}}$$

Tanto por ciento expresado en fracción:

* 10% .... $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$
* 25% .... $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$
* 100% .... $\frac{100}{100}=1$

Un número racional en tanto por ciento:

* $\frac{3}{4}$ .... $\frac{3}{4}\cdot 100\%=75\%$
* $\frac{6}{5}$ .... $\frac{6}{5}\cdot 100\%=120\%$
* 4 .... $4\cdot 100\%=400\%$

Observación: Es muy frecuente aplicar Regla de Tres Simple para problemas de tanto por ciento.

Ejemplo:
¿De qué número; 92 es el 15% más?

Resolución:
El número representa el 100%, entonces el 15% más, será: 100% + 15% = 115%
Es decir:

$$\begin{array}{ll} 92 \text{ ———— } & 115\% \\ x \text{ ———— } & 100\% \end{array}$$

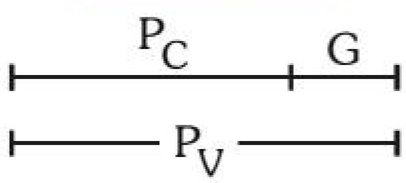
$$x=\frac{92(100\%)}{115\%}=80 \text{ Rpta.}$$

ASUNTOS COMERCIALES

1. Se compra un artículo en P_C; para luego venderlo en P_V entonces:

   I. Si $P_V > P_C$ hay ganancia y se cumple:

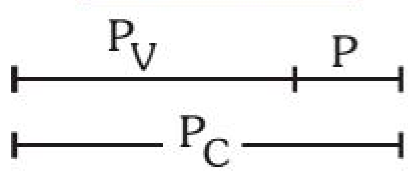
$$\boxed{P_V = P_C + G}$$



G : Ganancia ó Utilidad

   II. Si $P_V < P_C$ hay pérdida y se cumple:

$$\boxed{P_V = P_C - P}$$



P : Pérdida

2. Generalmente, al realizar un negocio, que nos va a dar una utilidad, ocasiona gastos (movilidad, alquiler, viáticos, etc.), entonces se cumple:

$$\boxed{G_{bruta} = G_{neta} + \text{gastos}}$$

3. Al precio fijado para la venta de un artículo se le llama Precio de Lista al cual casi siempre se le hace una rebaja y por consiguiente se cumple:

$$\boxed{P_L - R = P_V}$$

Importante: Generalmente, los aumentos se realizan sobre el precio de costo; mientras que los descuentos se hacen sobre el precio de lista.

OPERACIONES FRECUENTES

I. a%N + b%N = (a + b)%N

Ejemplo:
15%(60) + 25%(60) = 40%(60) = 24

II. a%N - b%N = (a − b)%N

Ejemplo:
72%(30) - 37%(30) es:
35%(30) = 10,5

III. n(a%N) = (na)%N

Ejemplo:
15(2% de 40) = 30% de 40 = 12

AUMENTOS SUCESIVOS

Método Práctico:

Aumento: +30% ; +40%

Nueva cantidad: $\frac{13\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 140\% = 182\%$

Aumento único: 182% - 100% = 82%

DESCUENTOS SUCESIVOS

Método Práctico:

Descuentos : - 30% ; - 12%

Queda : 70% . 88%

$$\frac{7\cancel{0}}{10\cancel{0}} \cdot 88\% = 61{,}6\%$$

Descuento único: 100% − 61,6% = 38,4%

Ejercicio de Aplicación:

Dos aumentos sucesivos del 30% y 40%. ¿A qué aumento único equivalen?

Resolución:

Cantidad inicial: N; le aumentamos el 30%, obtenemos: 100%N + 30%N = 130%N
al cual le aumentamos el 40%, para obtener el (100% + 40%) del 130%N.

Es decir, al final tengo:

$$\frac{140}{100}(130\%N) = 182\%N$$

Aumento único: 182%N − 100%N = 82%N

CONCEPTOS PRELIMINARES

En los bancos, el interés del capital se suma al depósito cada cierto tiempo. Si la adición se hace con más frecuencia, el capital crece más deprisa, por lo que el interés es cada vez mayor.

Tomemos un sencillo ejemplo, puramente teórico. Admitamos que se depositan 100 soles en un banco al 100% anual. Si se acumula el interés al depósito, al cabo del año sumarán 200 soles.

Veamos ahora qué ocurre si el porcentaje se va sumando al capital inicial cada medio año. Al finalizar el primer semestre llegará a 150% de S/. 100 = S/. 150.

Al finalizar segundo semestre 150% de S/. 150 = S/. 225. Si la adición se realiza cada 3 meses $\left(\frac{1}{4}\text{de año}\right)$, a fin de año se tendrá $(125\%)^4$ de S/. 100 soles que es S/. 224,10 soles aproximadamente. Si se acumula el interés cada $\frac{1}{10}$ de año a fin de año se tendrá $(110\%)^{10}$ de S/. 100 soles que es S/. 259,40 soles aproximadamente. Si hacemos más frecuentes los plazos de acumulación del interés al capital depositado cada $\frac{1}{100}$ de año ; $\frac{1}{1000}$ de año, etc.

¿Crecerá indefinidamente el capital?

CONCEPTOS ELEMENTALES

CAPITAL (C)
Designa un conjunto de bienes o una cantidad de dinero de los que se puede obtener ingresos en el futuro.

INTERÉS (I)
Es la ganancia que produce el capital durante un cierto tiempo con la condición de que cien unidades de dinero produzcan una cierta cantidad anual.

Ejemplo:

* Si se depositan $1000 en un banco y, después de cierto tiempo y se retira en total $1200, significa que se ha ganado un interés de $200.

TASA DE INTERÉS (r%)
Expresa el tanto por ciento del capital que se paga por la utilización de éste durante un tiempo.

Ejemplos:

* Una tasa de 12% mensual significa que se gana el 12% del capital por cada mes.
* Una tasa de 25% bimestral significa que se gana el 25% del capital por cada dos meses.

Observación:

> *Cuando no se especifique cada cuanto tiempo se aplica la tasa se deberá considerar tasa anual.*

TIEMPO (t)
Intervalo durante el cual se presta o utiliza el capital.

* 1 año < > 12 meses.
* 1 mes comercial < > 30 días
* 1 año comercial < > 360 días
* 1 año común < > 365 días
* 1 año bisiesto < > 366 días

MONTO (M)
Es la suma del capital y el interés generado.

$$Monto = Capital + Interés$$

Ejemplo Aplicativo:
Si un capital de 3000 soles, genera un interés de 500 soles, el monto es:

3000 soles + 500 soles = 3500 soles

CLASES DE INTERÉS

INTERÉS SIMPLE

En este caso, el capital es constante durante todo el tiempo, el interés es proporcional al tiempo y a la tasa.

Ejemplo Aplicativo:
César prestó 4000 soles a Fiorella durante 5 años con una tasa de 2% anual. Calcule el interés generado.

Resolución:
Como la tasa es 2% anual, por cada año que pasa se gana el 2% de S/. 4000 = S/. 80, entonces en 5 años se gana 5 veces S/. 80 = S/. 400

Observación:

El interés es D.P. al capital, a la tasa y al tiempo

Algunas fórmulas para el cálculo del interés simple:

$$I = C \cdot r\% \cdot t$$

Cuando la tasa y el tiempo están en las mismas unidades de tiempo.

INTERÉS COMPUESTO

En este caso el interés generado pasa a formar parte del capital cada cierto tiempo denominado periodo de capitalización, o sea que el capital aumenta cada cierto tiempo.

Ejemplo Aplicativo:
César prestó 40000 soles a Fiorella durante 4 años con una tasa de 20% anual capitalizable anualmente. Calcule el interés generado.

Resolución:
Como la tasa es 20% anual, por cada año que pasa se gana el 20% del capital acumulado al comenzar el año. En 4 años se han realizado 4 aumentos sucesivos del 20%.

1er. año: 120% de S/. 40000 = S/. 48000

2do. año: 120% de S/. 48000 = S/. 57600

3er. año: 120% de S/. 57600 = S/. 69120

4to. año: 120% de S/. 69120 = S/. 82944

Al finalizar el 4to. año, el monto es de S/. 82944; que también se puede calcular:

120% 120% 120% 120% S/.40000 = S/.82944

Entonces el interés en los 4 años es:

S/. 82944 − S/. 40000 = **S/. 42944**

INTERÉS CONTINUO:

El interés continuo se obtiene cuando la capitalización es en cada instante, es decir, fraccionando la tasa y el tiempo en un número de partes infinitamente grande.

El monto que se obtiene con un capital C, durante un tiempo t a una tasa r% (r% y t en las mismas unidades de tiempo, o sea, si r% es anual, t en años, etc.)

$$M = C.e^{r\%t}$$

Donde: e = 2,71828182...

Capítulo XI: Estadística

CONCEPTOS PRELIMINARES

El estudio de la Estadística es de carácter indispensable para cualquier profesional debido a que es una herramienta que le será de gran utilidad para la toma de decisiones sobre asuntos diversos, tiene aplicación en todos los campos del saber y profesiones.

Es muy difícil establecer una cronología exacta de los orígenes de la estadística. Parece ser que los datos más antiguos que se conocen son los censos chinos ordenados por el emperador Tao antes del año 2200 a.C.

A lo largo de la Edad Media y hasta principios del siglo XVII, la Estadística era puramente descriptiva, Bernouilli (1654 - 1705) y sobre todo Laplace (1749 - 1827) desarrollaron conceptos matemá-ticos fundamentales para la teoría estadística. El primero formuló la famosa ley de los grandes números y el segundo puso en evidencia las ventajas que podría aportar el cálculo de probabilidades en el estudio de los fenómenos naturales de causas complejas.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Es una rama de la Matemática aplicada que nos proporciona los métodos para realizar un estudio de un grupo de datos en cuanto a su recopilación, clasificación, presentación y descripción para poder tomar decisiones o hacer conclusiones.

ETAPAS:

Recopilación ➜ Clasificación ➜ Presentación ➜ Descripción

Todas estas etapas deben manjarse en un orden estricto para lograr óptimos resultados.

DEFINICIONES:

Población: Es el conjunto universal o referencial para realizar el estudio estadístico, cuyos elementos poseen la característica que se va a estudiar.

Muestra: Es un subconjunto de la población, los muestreos se realizan cuando es difícil o complicado estudiar toda la población, también se realiza con la finalidad de obtener resultados en menor tiempo y a menor costo, para ello es indispensable elegir una muestra adecuada, que represente a la población, de acuerdo a la característica que se estudia.

Ejemplo:

Conjunto de alumnos del colegio RAIMONDI → **Población**

Conjunto de alumnos de 5to de secundaria → **Muestra**

Ejercicio de aplicación:
Cite algunos ejemplos en los cuales sea conveniente tomar una muestra en vez de toda población debido a la dificultad que presenta su estudio.

TIPOS DE VARIABLES

Variable Cualitativa: Son aquellas que indican una cualidad:

Ejemplos:
La variable cualitativa sexo puede ser solamente masculino o femenino.

La variable cualitativa turno puede ser mañana, tarde o noche.

Son también variables cualitativas: la profesión de tus padres, el color de tus ojos, la universidad en la que piensas estudiar, etc.

> **Observación:**
>
> A este tipo de variables, se les puede asignar valores numéricos de acuerdo a la manera de utilizar los datos.

Por ejemplo, si estamos evaluando personal para trabajar en una mina a la variable sexo se le puede asignar 0 si es femenino y 1 si es masculino, indicando que se prefiere personal masculino para dicho trabajo.

Variable Cuantitativa: Son aquellas que pueden tomar valores numéricos:

Ejemplo:
Edad, número de hijos, tiempo de servicio, el coeficiente intelectual, notas, vida media, carga electrónica, hematocrito, etc.

* **Variable Cuantitativa Discreta:** Toma valores que están en correspondencia biunívoca con los números naturales.

Ejemplo:
La cantidad de hijos, cantidad de ingresantes a la UNI, el número de empleados de una fábrica, la cantidad de glóbulos rojos en una gota de sangre, etc.

* **Variable Cuantitativa Continua:** Toma todos los valores en algún intervalo.

Ejemplo:
Temperatura de un gas, longitud de una pared, estatura de un estudiante, etc.

Aritmética

ETAPAS DEL ESTUDIO ESTADÍSTICO

I. **RECOPILACIÓN:** Esto se realiza mediante encuestas y cuestionarios. Cuando se estudia toda la población, se denomina censo y cuando se realiza sobre un subconjunto de la misma, se denomina muestreo.

II. **CLASIFICACIÓN:** Cuando la cantidad de datos es grande, conviene clasificarlos y para simplificar su estudio. Esta clasificación debe realizarse teniendo en cuenta la finalidad del estudio y en muchos casos dependerá del criterio del profesional que hace dicho análisis.

A continuación, se presentan las edades de un grupo de 20 personas.
2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 12 ; 14 ; 16 ; 16 ; 16 ; 18; 21 ; 22 ; 23 ; 24 ; 25 ; 27 ; 29 ; 32

Tamaño de la muestra (n): Es la cantidad total de datos.

$$n = 20$$

Alcance (A): Intervalo cerrado cuyos límites son el menor y mayor de los datos.

$$A = [2 ; 32]$$

Rango o recorrido (R): Es la longitud del alcance, se calcula restando el menor dato del mayor dato.

$$R = 32 - 2 = 30$$

Intervalo de clase (I_i): Es un intervalo que se obtiene al dividir el alcance, para formar grupos de menor tamaño.
Por ejemplo, dividamos el alcance en 6 intervalos de clase del mismo tamaño.

$$[2;7\rangle\,[7;12\rangle\,[12;17\rangle\,[17;22\rangle\,[22;27\rangle\,[27;32]$$

2 — 32

Número de intervalos de clase (K): Es la cantidad de intervalos de clase en que se divide el alcance, esto depende de la aplicación que tiene el estudio de los datos.

Por ejemplo, si se desea conocer la cantidad de alumnos aprobados y desaprobados en el colegio RAIMONDI bastará formar dos intervalos de clase.

Observación: Existen algunas reglas que se pueden tomar como referencia para determinar el número de intervalos de clase.

Regla de Sturges: K = 1 + 3,3 Log(n)

Regla de Joule: $K=\sqrt{n}$

Ejemplo: Para n = 30

Apliquemos la regla de Sturges:

K = 1 + 3,3 Log(30) = 5,87

Que se puede aproximar: $K \cong 6$

Ancho de clase ($\mathbf{w}_i$): Es la longitud del intervalo de clase. Si todos los anchos de clase son iguales, se dice que el ancho de clase es constante y se puede calcular de la siguiente manera:

$$\boxed{w=\frac{R}{K}}$$

TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

I_i	f_i
$[2 - 7\rangle$	4
$[7 - 12\rangle$	1
$[12 - 17\rangle$	6
$[17 - 22\rangle$	2
$[22 - 27\rangle$	4
$[27 - 32\rangle$	3

III. PRESENTACIÓN: Se pueden presentar los datos en tablas de frecuencias o en gráficos.

Presentación Tabular:

Marca de clase ($\mathbf{x}_i$): Es un valor que representa a los datos del intervalo de clase, se calcula como la semisuma de los límites inferior y superior del intervalo de clase y está ubicado en el punto medio del mismo.

$$\boxed{x_i=\frac{L_{inf}+L_{sup}}{2}}$$

Frecuencia absoluta simple ($\mathbf{f}_i$): Es la cantidad de datos u observaciones en el i - ésimo intervalo de clase.

Se cumple que:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} f_i = n}$$

Frecuencia absoluta acumulada ($\mathbf{F}_i$): Es la suma de todas las frecuencias absolutas simples desde el primer intervalo hasta el i - ésimo intervalo.

Se cumple:

$$\boxed{F_k = n} \qquad \boxed{F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j}$$

Frecuencia relativa simple ($\mathbf{h}_i$): Indica qué parte del total de datos se encuentran en el i - ésimo intervalo. Se calcula como el cociente de la frecuencia absoluta y el total de datos. Para obtener el tanto por ciento basta multiplicar esta valor por 100.

Se cumple que:

$$\boxed{h_i=\frac{f_i}{n}} \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{k} h_i = 1}$$

Frecuencia relativa acumulada ($\mathbf{H}_i$): Indica qué parte del total de datos se encuentran desde el primer intervalo de clase hasta el i - ésimo intervalo. Se calcula como el cociente de la frecuencia absoluta acumulada y el número total de datos. Para obtener el tanto por ciento basta multiplicar esta valor por 100.

Se cumple que:

Aritmética

$$H_i = \frac{F_i}{n} \qquad H_i = \sum_{j=1}^{i} h_j \qquad H_k = 1$$

Ejemplo: La tabla con los datos del ejemplo anterior, es:

Intervalo	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
$[2 - 7\rangle$	4,5	4	4	0,20	0,20
$[7 - 12\rangle$	9,5	1	5	0,05	0,25
$[12 - 17\rangle$	14,5	6	11	0,30	0,55
$[17 - 22\rangle$	19,5	2	13	0,10	0,65
$[22 - 27\rangle$	24,5	4	17	0,20	0,85
$[27 - 32\rangle$	9,5	3	20	o,15	1,00

Presentación Gráfica: Los gráficos son muy utilizados por los periodistas para presentar datos en la televisión y periódicos, son de utilidad para los médicos, ingenieros, administradores, economistas, psicólogos, profesores, etc. ya que permite observar el comportamiento de una muestra con respecto a alguna característica, de un solo vistazo.

Algunos de los gráficos más usados son:

- Diagrama de barras
- Histogramas
- Pirámides de población
- Polígonos de frecuencias
- Diagrama de sectores
- Pictogramas.

Diagrama de barras: En este tipo de gráfica, sobre los valores de las variables se levantan barras estrechas de longitudes proporcionales a las frecuencias correspondientes. Se utilizan para representar variables cuantitativas discretas.

Por ejemplo, el siguiente diagrama de barras gráfica la cantidad de problemas propuestos para este capítulo por los profesores de Aritmética.

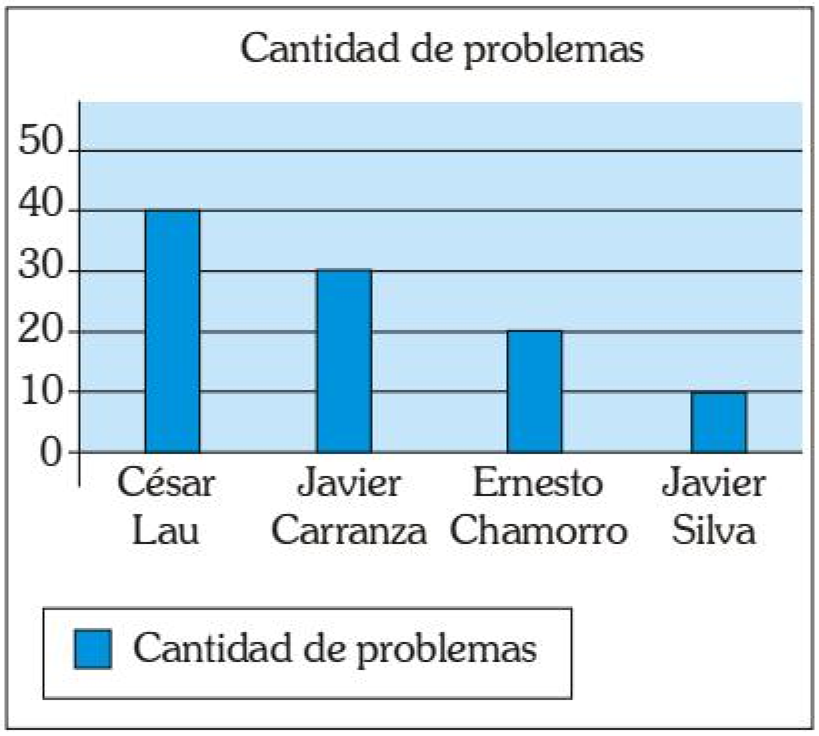
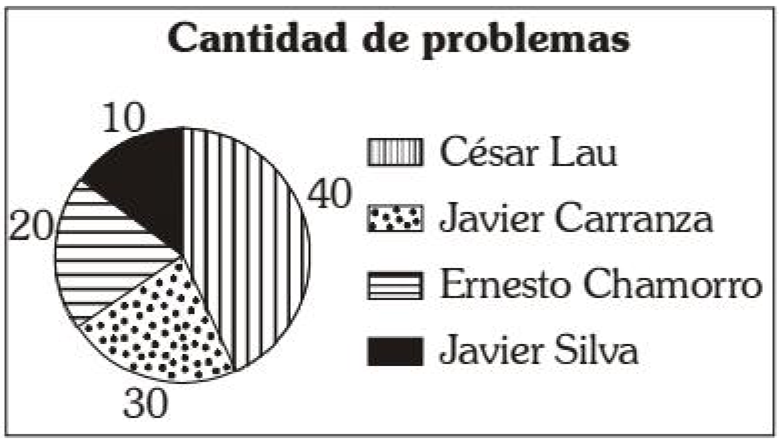


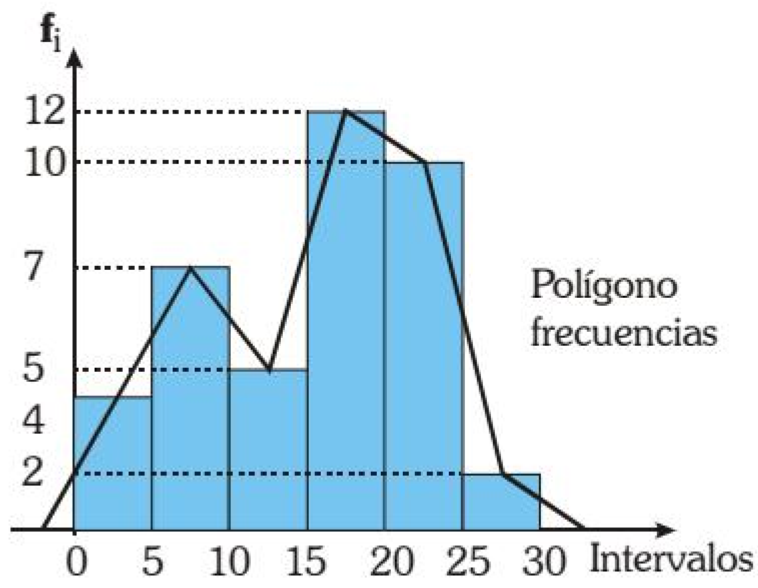
Diagrama de sectores: En un diagrama de este tipo, los 360º de un círculo se reparten proporcionalmente a las frecuencias de los distintos valores de la variable.

Estos gráficos resultan muy adecuados cuando hay pocos valores, o bien cuando el carácter que se estudia es cualitativo.



Histogramas: Los histogramas se utilizan para representar tablas de frecuencias con datos agrupados en intervalos. Si los intervalos son todos iguales, cada uno de ellos es la base de un rectángulo cuya altura es proporcional a la frecuencia correspondiente.

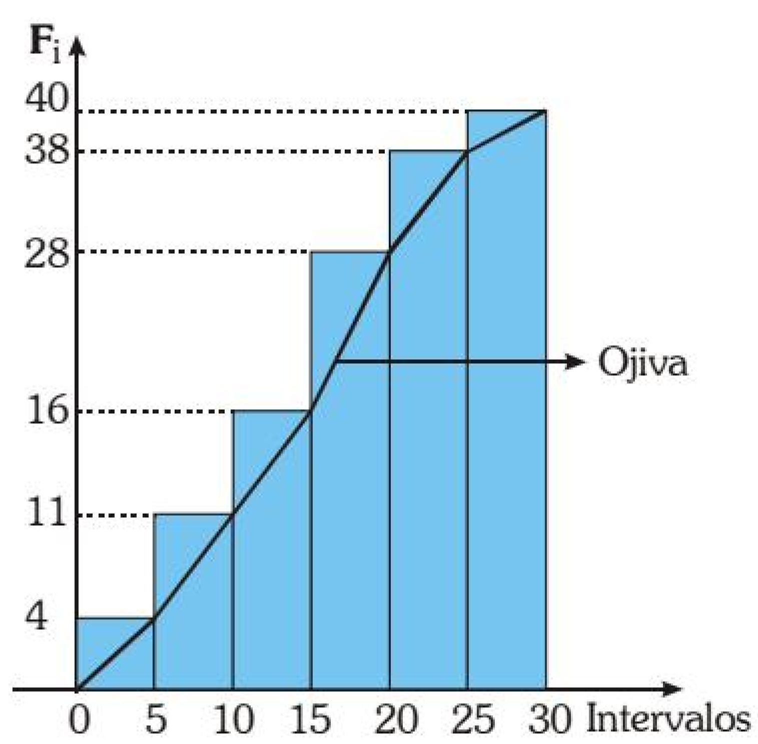
Polígono de frecuencias: Si se unen los puntos medios de la base superior de los rectángulos, se obtiene el polígono de frecuencias.



Observación: El área de la superficie limitada por el polígono de frecuencias y el eje horizontal es igual a la suma de las áreas de los rectángulos que forman el histograma.

Diagrama Escalonado: Llamado tambien Histograma de frecuencias acumuladas. Consiste en representar las frecuencias acumuladas de una tabla de datos agrupados, obteniendo de esta manera el histograma de frecuencias acumuladas.

Ojiva: Es una curva que se obtiene al unir todos los extremos superiores de las barras de un histograma de frecuencias absolutas acumuladas.



IV. DESCRIPCIÓN:

La descripción de los datos se realizará mediante las medidas de tendencia central.

Media: Para datos no agrupados: Es la media aritmética de los datos.

Para datos agrupados:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{n}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i h_i$$

Mediana:

Para datos no agrupados: La mediana es aquél dato que ocupa la posición central, cuando los datos están ordenados y si la cantidad de datos es par la mediana es el promedio de los dos datos centrales.

Ejemplos:

La mediana de los datos:
2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 20 ; 24; 25 es 6

La mediana para los datos:
4 ; 5 ; 12 ; 20 ; 100 ; 132 es la media aritmética de 12 y 20 que son los dos términos centrales, es decir la mediana es 16.

Para datos agrupados:

$$Me = L_{inf} + w\left(\frac{\frac{n}{2} - F_{me-1}}{f_{me}}\right)$$

$$Me = L_{inf} + w\left(\frac{\frac{1}{2} - H_{me-1}}{h_{me}}\right)$$

Donde:

L_{inf} : Límite inferior de la clase mediana.
w: Ancho de clase
F_{me-1} : Frecuencia absoluta acumulada de la clase anterior a la clase mediana.

Aritmética

f_{me} : Frecuencia absoluta simple de la clase mediana.

Moda:

Para datos no agrupados: Es el valor que aparece con más frecuencia. Si son dos los números que se repiten con la misma frecuencia, el conjunto tiene dos modas y se denomina bimodal. Otros conjuntos no tienen moda.

Ejemplo:
La moda para los datos:
3 ; 4 ; 6 ; 6 ; 6 ; 7 ; 10 ; 21 es 6

Para datos agrupados:

$$\boxed{Mo = L_{inf} + w\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right)}$$

Donde:

L_{inf} : Límite inferior de la clase modal.

w: Ancho de clase

$\Delta_1 = f_{mo} - f_{mo-1}$

$\Delta_2 = f_{mo} - f_{mo+1}$

f_{mo} : frecuencia absoluta simple de la clase modal.

f_{mo+1}: frecuencia absoluta simple de la clase posterior a la clase modal.

f_{mo-1}: frecuencia absoluta simple de la clase anterior a la clase modal.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión muestran la variabilidad de una distribución, indicándolo por medio de un número, si las diferentes puntuaciones de una variable están muy alejadas de la media. Cuanto mayor sea ese valor, mayor será la variabilidad, cuanto menor sea, más homogénea será a la media. Así se sabe si todos los casos son parecidos o varían mucho entre ellos.

Es conveniente considerar cuatro variables de dispersión: la amplitud de variación, la desviación media, la varianza y la desviación estándar. Todas estas medidas, excepto la amplitud de variación, toman a la media como punto de referencia.

Desviación absoluta media

Mide la desviación promedio de valores con respecto a la media del grupo, sin tomar en cuenta el signo d ella desviación. Se obtiene al restar la media de cada valor del grupo, eliminando el signo (+ o -) de la desviación, hallando después el promedio.

$$\boxed{d = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}}$$

Varianza

La varianza de una muestra se calcula casi en la misma forma que la desviación media, con dos pequeñas diferencias: 1) las desviaciones se elevan al cuadrado antes de ser sumadas y, 2) se obtiene el promedio, utilizando (n -1) en lugar de n.

La varianza muestral se puede calcular mediante la fórmula siguiente:

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Desviación estándar

El desvío estándar es simplemente la raiz cuadrada positiva de la varianza. De este modo si la varianza es 8.1, la desviación estándar es 9. Para obtener la desviación estándar se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}}$$

Capítulo XII: Numeración

CONCEPTOS PRELIMINARES

Se puede decir que la Matemática tomó forma de ciencia en la antigua Mesopotamia, donde los sumerios crearon la escritura cuneiforme (3,200 a.C.) La civilización de Babilonia desarrollada en la antigua Caldea creó el sistema sexagesimal, aunque no conocían el cero utilizaban 2 símbolos ϒ = 1 y ≺ = 10.

Hasta que mucho tiempo después aparecieron los sistemas de numeración que utilizaban los dedos (decimal, quinario, duodecimal, vigesimal, etc).

Pero podemos decir que recién en el siglo V d.C. se fraguaron los orígenes de nuestro sistema de numeración (decimal). El principio de posición; ocasionó las nueve cifras y el cero aparece en la obra del matemático indio Brahmagupta.

Es decir, los hindúes crearon las cifras 0, 1, 2, 3, ..., 9; pero fueron los árabes los que difundieron estos símbolos por Europa.

NUMERACIÓN
Parte de la aritmética que se encarga de la forma correcta de expresar y representar a los números.

NÚMERO
Es un ente matemático que nos permite cuantificar a los objetos que nos rodean.

NUMERAL
Es la representación simbólica del número.

Mayas: • = 1 ; —— = 5 ; ☼ = 20
Romanos: I ; V ; X ; L ; C ; D ; M
Hindúes - Árabes: 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

Ejemplo:
"Cinco" se puede representar así:

卌 ; ⁙ ; $\overline{\text{V}}$; —; 5 ; ϒϒϒϒϒ; .... etc

SISTEMA DE NUMERACIÓN
Conjunto de reglas y principios convencionales para representar un número.

PRINCIPIOS

1. **DEL ORDEN:** Toda cifra en un numeral, tiene orden, por convención, se enumera de derecha a izquierda.

   Ejemplo:

   4 3 2 8 (←)
   - 8 → 1er. orden (unidades)
   - 2 → 2do. orden (decenas)
   - 3 → 3er. orden (centenas)
   - 4 → 4to. orden (millares)

   Observación: También podemos encontrar el lugar que ocupa una cifra y se toma de izquierda a derecha.

   4 3 2 8 (→)
   - 8 → 4to. lugar
   - 2 → 3er. lugar
   - 3 → 2do. lugar
   - 4 → 1er. lugar

2. **DE LA BASE:** Todo Sistema posicional de numeración tiene una base, que es un número natural mayor que la unidad, el cual indica la cantidad de unidades necesarias para pasar de un orden al orden inmediato superior. En forma sencilla, la base nos indica la forma como debemos agrupar.

3. **DE SUS CIFRAS:** Las cifras son números naturales que siempre son menores que la base. En base "n" las cifras pertenecen al conjunto: {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; ...... ; (n - 1)}

Observación: **Valor de sus cifras**

V_a : Valor Absoluto

V_R : Valor Relativo

$$\begin{array}{l} 4 \to V_a = 4 \\ 3 \to V_a = 3 \\ 2 \to V_a = 2 \\ 8 \to V_a = 8 \\ \end{array}$$

4 3 2 8

$$\begin{array}{l} 8 \to V_R = 8 \text{ unidades} \\ 2 \to V_R = 2 \text{ decenas} \\ 3 \to V_R = 3 \text{ centenas} \\ 4 \to V_R = 4 \text{ millares} \end{array}$$

Algunos Sistemas Posicionales de Numeración

Base	Sistema	Cifras a utilizar
2	Binario	0, 1
3	Ternario	0, 1, 2
4	Cuaternario	0, 1, 2, 3
5	Quinario	0, 1, 2, 3, 4
6	Senario	0, 1, 2, 3, 4, 5
7	Heptanario	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
8	Octanario	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
9	Nonario	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
10	Decimal	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

REPRESENTACIÓN LITERAL DE UN NÚMERO

* Numeral de 2 cifras base 10
  $\overline{ab} \in \{10 ; 11 ; 12 ; ..... ; 99\}$
* Numeral de 3 cifras base 5
  $\overline{abc}_{(5)} \in \{100_{(5)} ; 101_{(5)} ; 102_{(5)} ; ... ; 444_{(5)}\}$

NUMERAL CAPICÚA: Aquel cuyas cifras equidistantes de los extremos del numeral son iguales.

Ejemplo: a; $\overline{aa}$; $\overline{aba}$; $\overline{abba}$; $\overline{abcba}$; $\overline{aa}$

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

Consiste en expresar un número como la suma de sus valores relativos.

Ejemplo:

$$4326_{(7)} = V_R(4) + V_R(3) + V_R(2) + V_R(6)$$

$$4326_{(7)} = 4 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0$$

En general:

$N = \overline{a_{k-1}a_{k-2}a_{k-3}....a_2a_1a_0}_{(n)}$ numeral de "k" cifras de la base "n"

$$\boxed{N = a_{k-1} \cdot n^{k-1} + a_{k-2} \cdot n^{k-2} + ... + a_1 \cdot k^1 + a_0}$$

POR BLOQUES: Consiste en descomponer un numeral tomando convenientemente las cifras de 2 en 2, 3 en 3, etc.

Ejemplos:

$$\overline{\underbrace{ab}\underbrace{ab}\underbrace{ab}}_{(n)} = \overline{ab}_{(n)} \cdot n^4 + \overline{ab}_{(n)} \cdot n^2 + \overline{ab}_{(n)} \cdot$$

$$\overline{\underbrace{abc}\underbrace{abc}}_{(5)} = \overline{abc}_{(5)} \cdot 5^3 + \overline{abc}_{(5)}$$

CAMBIO DE BASE

1. De base n a base 10

Ejemplo: Expresar $2132_{(6)}$ en base 10

"El método, consiste en descomponer polinómicamente el número"

$$2132_{(6)} = 2 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 2$$

$$2132_{(6)} = 432 + 36 + 18 + 2$$

$$2132_{(6)} = 488 \text{ Rpta}$$

Otro método: (Ruffini)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & & 12 & 78 & 486 \\ \hline & 2 & 13 & 81 & 488 \end{array} \quad \textbf{Rpta}$$

2. De base 10 a base n

Ejemplo: Expresar 435 a base 7

"El método consiste en dividir sucesivamente entre 7, los residuos que van quedando, indican las cifras del orden respectivo".

$$\begin{array}{rrrr} 435 & \underline{|\,7} & & \\ 1 & 62 & \underline{|\,7} & \\ & 6 & 8 & \underline{|\,7} \\ & & 1 & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow 435 = 1161_7$

3. De base n a base m

Ejemplo: Expresar $416_{(8)}$ a base 9
"El método, consiste en expresar primero en base 10 y luego dicho resultado a base 9".

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 4 & 1\ + & 6\ + \\ 8 & \downarrow & 32 & 264 \\ \hline & 4 & 33 & 270 \end{array}$$

Luego 270 a base 9

$$\begin{array}{rrr} 270 & \underline{|\,9} & \\ 0 & 30 & \underline{|\,9} \\ & 3 & 3 \end{array}$$

$\Rightarrow 416_{(8)} = 330_{(9)}$

Observación: "A mayor numeral aparente, menor base"
$416 > 330 \rightarrow 8 < 9$

Límite de un numeral $N_{(n)}$ de "k" cifras

$$\boxed{n^{k-1} \le N_{(n)} < n^k}$$

Ejemplos:

$$10^2 \le \overline{abc} < 10^3$$

$$6^3 \le \overline{abcd}_{(6)} < 6^4$$

PROPIEDADES

1. Numeral de k cifras máximas

$$\boxed{\overline{\underbrace{(n-1)(n-1)...(n-1)}_{k\ \text{cifras}}}_{(n)} = n^k - 1}$$

Ejemplo: $777_{(8)} = 8^3 - 1$

2.

$$\boxed{\overline{1a_1}\ \overline{1a_2}\ \overline{1a_3}\ \cdots\ \overline{1a}_{k(n)} = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + n}$$

Ejemplo:

$$12\ 13\ 14_{(8)} = 2 + 3 + 4 + 8 = 17$$

3.

$$\boxed{\underbrace{\overline{ab}\ \overline{ab}\ \overline{ab}\ \cdots\ \overline{ab}_{(n)}}_{k\ \text{veces}} = a^k n + a^{k-1}b + a^{k-3}b + ... + a^2b + a^1b + b}$$

CAMBIO DE BASE DIRECTO

Expresar $133_{(1000)}$ en la base 1001.

* $1000 - 1001 = -1$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 3 & 3 \\ -1 & & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & \\ \hline & 1 & 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow 133_{(1000)} = 111_{(1001)}$

Se debe aplicar el método de Ruffini para realizar el cambio de base directo.

Importante:

Para convertir números de base "n" a base 10, se debe utilizar la descomposición polinómica.

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

La descomposición polinomial o polinómica de un número: es la descomposición de un número expresando el valor posicional de sus cifras usando potencias de la base del sistema de numeración.

El número 9358 y 867, escritos en el Sistema de Numeración Decimal, se descompone en forma polinómica de esta manera:

N°	Descomposición
9358	$9\cdot10^3+3\cdot10^2+5\cdot10^1+8\cdot10^0$ $9\cdot1000+3\cdot100+5\cdot10+8$
867	$8\cdot10^2+6\cdot10^1+7\cdot10^0$ $8\cdot100+6\cdot10+5$

En general: Para un número de 5 cifras

$\overline{abcde}$	$10^4a+10^3b+10^2c+10d+e$

CASOS ESPECIALES DE CAMBIO DE BASE

I. De base n a base n^k : Se toma el numeral de la base "n" y se separa de derecha a izquierda grupos de "k" cifras. Enseguida, a cada grupo se aplica descomposición polinómica.

Ejemplo:

$11011011101_{(2)}$ a base 8

Resolución:

Base 2 a base $8=2^{3 \longrightarrow k}$

$$11|011|011|101_{(2)}$$

Luego:

$11_{(2)}=1\times2+1=3$

$011_{(2)}=1\times2+1=3$

$101_{(2)}=1\times4+1=5$

Entonces: $11011011101_{(2)}=3335_{(8)}$ Rpta

Ejercicio:

* Convertir $2120110122_{(3)}$ a base 9

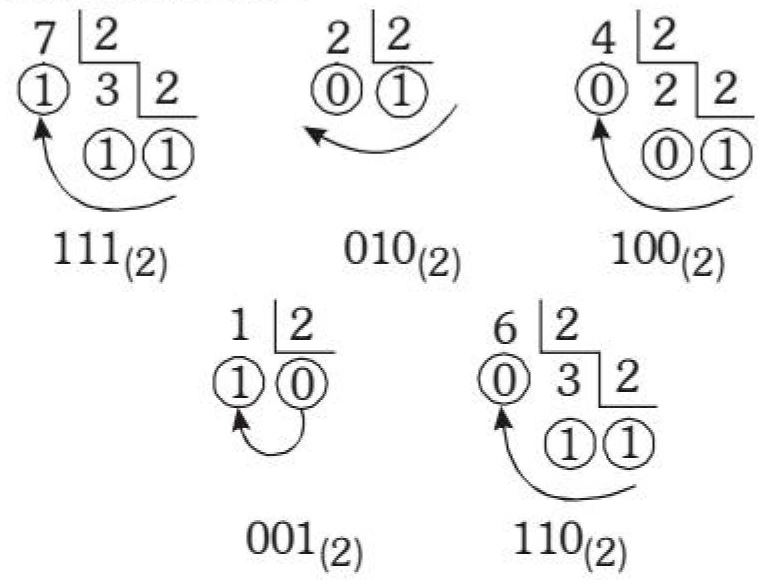
II. De base n^k a base n: Se toma cada una de las cifras de la base n^k y se convierte a base n, tratando de obtener grupos de "k" cifras, si algún grupo no tiene "k" cifras se completa con ceros a la izquierda.

Ejemplo:

$72416_{(8)}$ a base 2

Base $8=2^3$ a base 2

Cada una de las cifras de la base 8, se convierten a base 2.



Luego:

$$72416_{(8)}=\underbrace{111}\underbrace{010}\underbrace{100}\underbrace{001}\underbrace{110}_{(2)}$$

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA PARA NÚMEROS POSITIVOS MENORES QUE LA UNIDAD

$$0\,,\,a_1a_2a_3.....a_{n(k)}=\frac{a_1}{k^1}+\frac{a_2}{k^2}+\frac{a_3}{k^3}+...+\frac{a_n}{k^n}$$

Ejemplos:

* $0,24_{(5)}=\frac{2}{5^1}+\frac{4}{5^2}$

* $0,371_{(8)}=\frac{3}{8^1}+\frac{7}{8^2}+\frac{1}{8^3}$

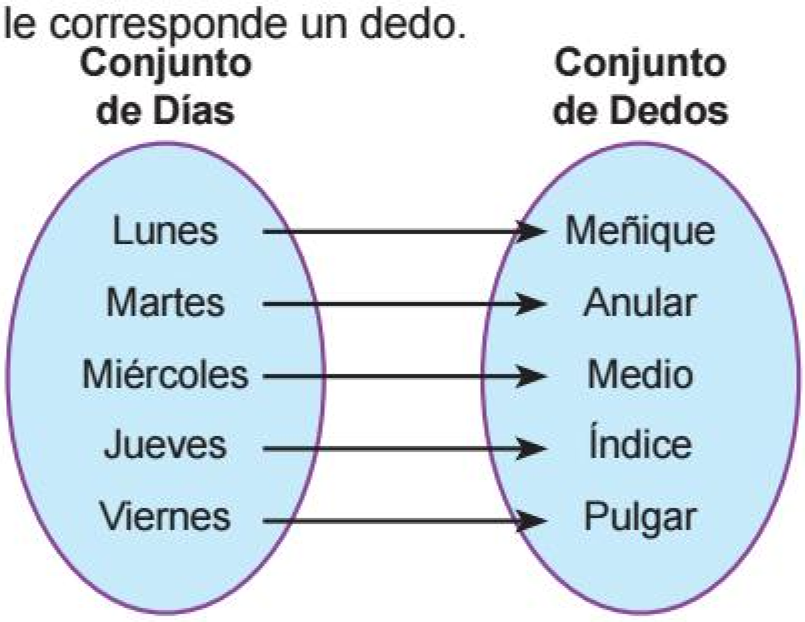
Aritmética

Capítulo XIII: Conteo de Números

CONCEPTOS PRELIMINARES

Contar significa establecer una relación entre dos colecciones de objetos de tal modo que a cada objeto de un conjunto se le haga corresponder otro de otro conjunto.

Por ejemplo, cuando un alumno cuenta los días de la semana que asiste a clases a su colegio hace corresponder a cada día un dedo de su mano, estableciéndose así una aplicación, es decir a cada día le corresponde un dedo.



SUCESIÓN

Se llama sucesión a toda aplicación del conjunto de números enteros positivos en el conjunto de los números reales R. Sus elementos se representan: a_1 ; a_2 ; a_3 ; ..... ; a_n donde nos indican el primero, segundo, el tercero y así sucesivamente. Si aparece el último término se dice término enésimo y la sucesión es finita, si no aparece es infinita.

NÚMEROS EN SUCESIÓN NUMÉRICA

1. Progresión Aritmética

$$18 \;;\; 20 \;;\; 22 \;;\; 24 \;;\; 26$$

$$+2 \quad +2 \quad +2 \quad +2$$

Es una sucesión numérica de 5 términos donde el primero es 18 y los siguientes se obtienen aumentando 2 al anterior; a esta sucesión se le llama sucesión aritmética o progresión aritmética.

El término de lugar "n" será: $a_n = 16 + 2n$

2. Progresión Geométrica

$$9 \;;\; 45 \;;\; 225 \;;\; 1125 \;;\; ......$$

$$x5 \quad x5 \quad x5$$

Es una sucesión numérica donde cada término se obtienen multiplicando por 5 al término anterior; a esta sucesión, se le llama sucesión geométrica o progresión geométrica.

El término de lugar "n" será: $a_n = 9 \cdot 5^{n-1}$

SUCESIÓN ARITMÉTICA DE PRIMER ORDEN O LINEAL (Progresión Aritmética)

Se llama así a aquella sucesión donde la diferencia entre dos términos consecutivos es siempre la misma; es decir cada término se obtiene agregando una cantidad constante al término que le precede, a dicha cantidad se le llama razón de la progresión aritmética.

Ejemplos:

1. $8 \;;\; 17 \;;\; 26 \;;\; ...... \;;\; 206$

   $+9 \quad +9$

2. $94 \;;\; 90 \;;\; 86 \;;\; ...... \;;\; 14$

   $-4 \quad -4$

En General:

$$\underbrace{a_1 \; ; \; a_2}_{r} \; ; \; \underbrace{\; ; \; a_3}_{r} \; ; \; \ldots\ldots \; ; \; a_n$$

Se deduce que:

I. RAZÓN (r): Es la diferencia de dos términos consecutivos de la progresión aritmética.

$$\boxed{r = a_k - a_{k-1}}$$

II. TÉRMINO ENÉSIMO (a_n) : La siguiente fórmula se utiliza para hallar un término cualquiera de la progresión.

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

"n" es el lugar que ocupa el término que se quiere calcular.

III. NÚMERO DE TÉRMINOS (n)

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1}$$

Donde:

a_n : término de lugar n
a_1 : primer término
r : valor de la razón

Ejercicio de aplicación:
En la siguiente sucesión aritmética, calcule la razón, su cantidad de términos y los términos de lugar 23 y 37.

S: 23 ; 30 ; 37 ; .... ; 506

Resolución:

* r = 30 - 23 = 7
* $n = \dfrac{506-23}{7} + 1 = 70$
* $a_{23} = 23 + 22(7) = 177$
* $a_{37} = 23 + 36(7) = 275$

CONTEO DE CIFRAS

Consiste en calcular el número de cifras de una sucesión numérica.

Ejemplo:
Calcule el número de cifras de:

37 ; 40 ; 43 ; ...... ; 214

Resolución:

* Del 37 al 97 hay $\dfrac{97-37}{3} + 1 = 21$ números de dos cifras tenemos: $21 \times 2 = 42$ cifras.
* Del 100 al 214 hay $\dfrac{214-100}{3} + 1 = 39$ números de tres cifras tenemos $39 \times 3 = 117$ cifras.

Entonces en total hay 42 + 117 = 159 cifras

PAGINACIÓN

Al imprimir un libro, periódico, etc. antiguamente se utilizaba en la tipografía por cada letra o símbolo un tipo de imprenta.

Ejemplo:
Diga Ud. la cantidad de tipos de imprenta que se utilizan para enumerar las páginas de un libro de 248 páginas.

Resolución:
Del 1 al 9 hay 9 páginas, del 10 al 99 hay 90 páginas, de 100 al 248 hay 149 páginas entonces en total hay:

$$9 \times 1 + 90 \times 2 + 149 \times 3 = 636 \text{ cifras}$$

Nota: Para un libro de "p" páginas el número de cifras o tipos de imprenta utilizado es:

$$\boxed{N^{o}\text{ cifras} = (p+1)k - \underbrace{111....111}_{k \text{ cifras}}}$$

k: número de cifras de "p"

En el ejemplo anterior p = 248 y k = 3 entonces:
Nº de cifras es: (248 + 1)3 - 111 = 636 Rpta.

Capítulo XIV: Las Cuatro Operaciones

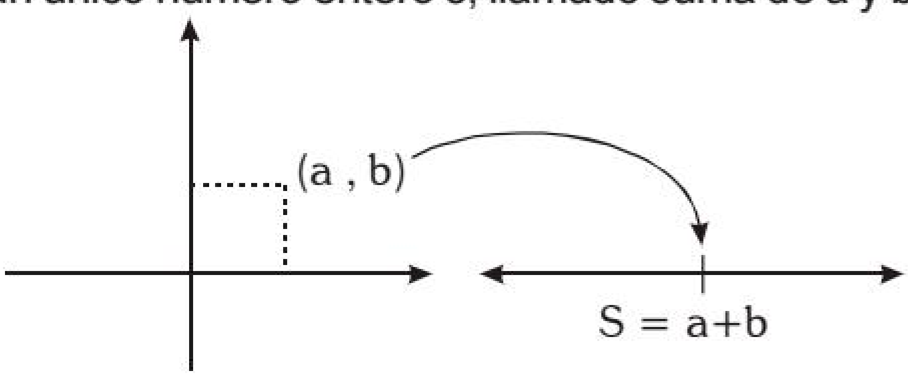
CONCEPTOS PRELIMINARES

Definimos adición y multiplicación de los números enteros no negativos de tal manera que las propiedades de cada uno como operación binaria sean más admisibles.

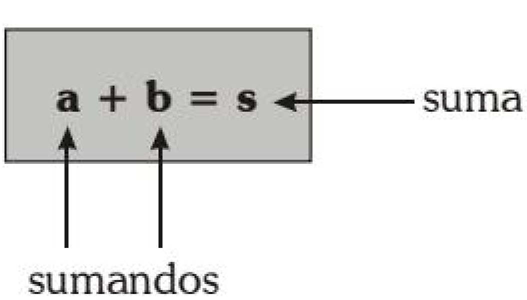
Una vez establecidas, las llamaremos leyes, porque nos guían en lo es posible hacer en Aritmética, veremos como estas leyes nos permiten ahorrar trabajo en los cálculos, nos ayudan a encontrar y entender procedimientos abreviados, así como dar sentido a lo que antes aprendimos mecánicamente.

LA ADICIÓN

La adición en Z, que utiliza el operador +, es la operación mediante la cual se asigna a dos números enteros a y b denominados términos o sumandos un único número entero s, llamado suma de a y b.



OPERACION: Adición
OPERADOR: +



AXIOMAS PARA LA ADICIÓN

Clausura: La suma de dos números enteros es también un número entero.

Conmutativa: Al cambiar el orden de los sumandos, la suma no se altera.

Asociativa: La suma de tres o más números enteros no varía al agrupar los sumandos de dos en dos.

Elemento neutro (identidad aditiva): El único elemento del conjunto de números enteros que sumado con otro número entero a da como resultado el mismo número a es 0.

Opuesto o inverso aditivo: Para cada número entero a, existe un único número entero − a tal que: a + (−a) = 0

SUMAS NOTABLES:

1) Suma de números naturales consecutivos

$S = 1 + 2 + 3 + ... + n$

$$\boxed{S = \frac{n(n+1)}{2}}$$

2) Suma de números pares consecutivos

$S = 2 + 4 + 6 + ... + 2n$

$$\boxed{S = n(n+1)}$$

3) Suma de números impares consecutivos

$S = 1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1$

$$\boxed{S = n^2}$$

4) Suma de cuadrados naturales consecutivos

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

$$\boxed{S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

5) Suma de cubos naturales consecutivos

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

$$\boxed{S = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

6) Suma de cuartas potencias naturales consecutivas

$$S = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$$

$$\boxed{S = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$$

7) Suma de productos naturales consecutivos

$$S = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + n(n+1)$$

$$\boxed{S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

8) Suma de productos triples naturales consecutivos

$$S = 1\times 2\times 3 + 2\times 3\times 4 + 3\times 4\times 5 + \ldots + n(n+1)(n+2)$$

$$\boxed{S = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

9) Suma de inversas de los productos naturales consecutivos

$$S = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\boxed{S = \frac{n}{n+1}}$$

10) Suma de potencias consecutivas (Cociente Notable)

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$$

$$\boxed{S = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}}$$

Definición del número irracional "e"

* Se define $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Además, otra forma de definir este mismo número es como sigue:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Suma de términos de una progresión aritmética

$$\boxed{S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)\cdot n}$$

LA SUSTRACCIÓN

La sustracción en Z, que utiliza el operador −, es la operación inversa de la adición mediante la cual se asigna a dos números enteros M y S denominados minuendo y sustraendo respectivamente un único entero D denominado diferencia.

OPERACIÓN: Sustracción
OPERADOR: −

$$\underbrace{\mathbf{M}}_{\text{Minuendo}} - \underbrace{\mathbf{S}}_{\text{Sustraendo}} = \underbrace{\mathbf{D}}_{\text{Diferencia}}$$

PROPIEDAD: La suma de los tres términos de una sustracción es igual al doble del minuendo.

$$\boxed{M + S + D = 2M}$$

PROPIEDAD: Si a > c y además:

$$\begin{array}{r} \overline{abc}_{(n)} \; - \\ \overline{cba}_{(n)} \\ \hline \overline{xyz}_{(n)} \end{array}$$

Se cumple que: $x + z = y = n - 1$

$a - c = x + 1$

COMPLEMENTO ARITMÉTICO

Sea N un numeral de k cifras de la base B

$$\boxed{CAN_{(B)} = B^k - N_{(B)}}$$

Ejemplo:

$$CA(34_5) = 5^2 - 34_5 = 11_5$$

También:

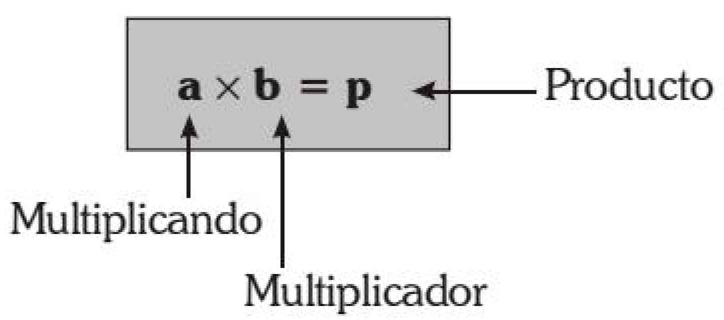
$$\boxed{CAN_{(B)} = \underbrace{100......0}_{\text{"k" ceros}}{}_{(B)} - N_{(B)}}$$

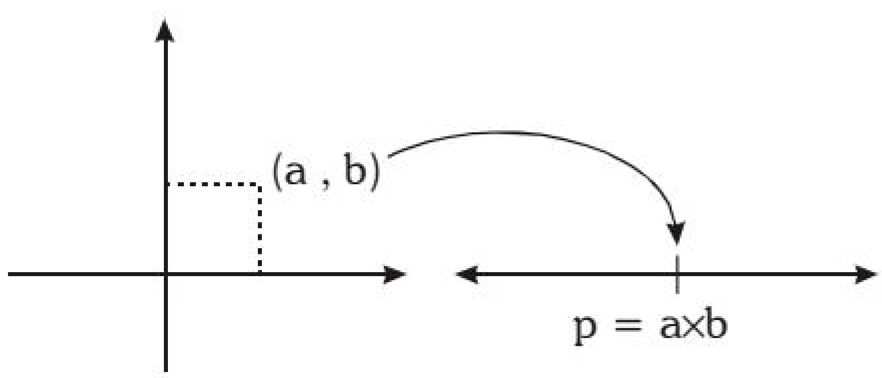
Ejemplo:

$$CA\left[34_{(5)}\right] = 100_{(5)} - 34_{(5)} = 11_{(5)}$$

LA MULTIPLICACIÓN

La multiplicación en Z, que utiliza el operador $\times$, es la operación mediante la cual se asigna a dos números enteros a y b denominados factores un único número entero p, llamado producto de a y b.





AXIOMAS PARA LA MULTIPLICACIÓN

Clausura: El producto de dos números enteros es también un número entero.

Conmutativa: Al cambiar el orden de los factores el producto no se altera.

Asociativa: El producto de tres o más números enteros no varía al agrupar los factores de dos en dos.

Elemento neutro o identidad: El único elemento del conjunto de números enteros que multiplicado con otro número entero a da como resultado el mismo número a es 1.

Cancelación multiplicativa: Sean a , b , c en Z.
Si: $ac = bc \quad \wedge \quad c \neq 0 \Rightarrow a = b$

Distributiva: Para a , b y c $\in \mathbb{Z}$, se cumple:

$$a(b + c) = ab + ac$$

LA DIVISIÓN ENTERA

Dados dos números naturales a y b $(b \neq 0)$, se define división (Operación inversa a la multiplicación) de a entre b y se denota $\frac{a}{b}$ si existe un c tal que: $a = b \times c$.

Ahora si c no es entero, debe existir un r < b tal que $a = b \cdot c + r$.

I. División entera exacta:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline 0 & q \end{array} \longrightarrow \boxed{D = dq}$$

(d: Divisor; D: Dividendo)

II. División entera inexacta:

i) Por defecto:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \longrightarrow \text{Cociente por defecto}$$

$$\Rightarrow \boxed{D = dq + r}$$

ii) Por exceso

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r' & q+1 \end{array} \longrightarrow \text{Cociente por exceso}$$

$$\Rightarrow \boxed{D = d(q + 1) - r'}$$

PROPIEDADES

1. El residuo de una división entera es siempre menor que el divisor.

   Residuo < Divisor

   Como consecuencia:
   Residuo máximo = divisor − 1
   Residuo mínimo = 1

2. La suma del residuo por defecto y el residuo por exceso de una división entera es igual al divisor.

   $$r + r' = d$$

3. Los cocientes por defecto y por exceso de una división son dos números consecutivos.

PROBLEMAS SOBRE CUATRO OPERACIONES

Si se tiene:
a: número mayor
b: número menor
S: suma de "a" y "b"
D: diferencia
q: cociente de dividir "a" y "b"
r: residuo de "a" y "b"
p: producto de "a" y "b"

a) Conociendo la suma "S" y la diferencia "D" de dos números:

$$\begin{cases} a+b=S \\ a-b=D \end{cases}$$

$$\boxed{a=\frac{S+D}{2}} \qquad \boxed{b=\frac{S-D}{2}}$$

b) Conocida la suma "S" y el cociente "q" de dos números:

$$\begin{cases} a+b=S \\ \dfrac{a}{b}=q \end{cases}$$

$$\boxed{a=\frac{qS}{q+1}} \qquad \boxed{b=\frac{S-r}{q+1}}$$

c) Conocida la suma "S", el cociente "q" y el residuo "r" de dos números:

$$\begin{cases} a+b=S \\ a=bq+r \end{cases}$$

$$\boxed{a=\frac{Sq+r}{q+1}} \qquad \boxed{b=\frac{S-r}{q+1}}$$

d) Conocida la diferencia "D" y el cociente "q" de dos números

$$\begin{cases} a-b=D \\ \dfrac{a}{b}=q \end{cases}$$

$$\boxed{a=\frac{qD}{q-1}} \qquad \boxed{b=\frac{D}{q-1}}$$

e) Conocida la diferencia "D", el cociente "q" y el residuo "r" de dos números:

$$\begin{cases} a-b=D \\ a=bq+r \end{cases}$$

$$\boxed{a=\frac{Dq-r}{q-1}} \qquad \boxed{b=\frac{D-r}{q-1}}$$

f) Conocido el producto "p" y el cociente "q" de dos números:

$$\begin{cases} ab=p \\ \dfrac{a}{b}=q \end{cases}$$

$$\boxed{a=\sqrt{pq}} \qquad \boxed{b=\sqrt{\frac{p}{q}}}$$

Importante:

- Las operaciones de Adición y Multiplicación están totalmente definidas en el sistema de los números naturales.
- Las operaciones de Sustracción y División no están totalmente definidas en el sistema de los números naturales se dice que están parcialmente definidas

Aritmética

Teoría de la Divisibilidad

CONCEPTOS PRELIMINARES

La divisibilidad numérica puede realizarse en los naturales, enteros, racionales ..., es por ello que presenta distintos grados de dificultad ya que muchos conceptos corresponden a una Aritmética Superior, llamada Teoría de Números, la cual se podría decir surge desde Euclides (Algoritmo para MCD); Fermat, Euler, Legendre, Gauss, que con su aporte (Discusiones aritméticas) contribuye al enriquecimiento de dicha teoría; llegando luego otros matemáticos como Dirichlet, Kronecker, Riemann, Dedekind, entre otros que siguen aportando y muestran la importancia que ahora tiene dicha teoría.

Nosotros nos limitaremos a trabajar en el conjunto numérico de los enteros.

Sabemos que la suma, diferencia y producto de dos números enteros es siempre entero, es decir, las operaciones de Adición, Sustracción y Multiplicación son cerradas en Z. Pero el cociente de dos enteros puede ser o no entero, se hace necesario hablar de números divisibles y no divisibles.

NÚMEROS DIVISIBLES: Dos números enteros a y b son divisibles si:

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} 0 & c \end{array} \qquad c: \text{entero}$$

Por división entera b > 0, entonces $b \in \mathbb{Z}^+$ (módulo); de la división se obtiene:

$$a = b \times c$$

En la cual diremos que "a" es múltiplo de "b" y lo denotaremos:

$$\boxed{a = \overset{\circ}{b}}$$

También se utilizan las notaciones:

$$a = mb$$

$$a = \overset{\circ}{b}$$

Si a es divisible entre b, se puede decir que "b" divide a "a" esto se denota: b|a

Ejemplo: 91 es divisible entre 13 porque

$$\begin{array}{l|l} 91 & 13 \\ \cline{2-2} 0 & 7 \end{array}$$

También diremos $91 = \overset{\circ}{13}$ porque $91 = 13 \times 7$.

Nota:

$$\overset{\circ}{12} = 12\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Entero}}}{K} \begin{cases} 0\,;\,12\,;\,24\,;\,..... \\ -12\,;\,-24\,;\,..... \end{cases}$$

NÚMEROS NO DIVISIBLES: a y b no son divisibles si la división de a por b es inexacta.

Ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} 37 & 7 \\ \cline{2-2} 2 & 5 \end{array}$$

$$37 = \underset{\substack{\downarrow \\ 35}}{\overset{\circ}{7}} + 2 = \underset{\substack{\downarrow \\ 42}}{\overset{\circ}{7}} - 5$$

PRINCIPIOS DE LA DIVISIBILIDAD:

I. OPERACIONES CON MÚLTIPLOS

1. $\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$
2. $\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$
3. $\overset{\circ}{n} \cdot \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$
4. $\overset{\circ}{n} \cdot K = \begin{cases} \overset{\circ}{n} \\ \overset{\circ}{\overline{n \cdot K}} \end{cases}$ $(k \in Z^+)$
5. $\left(\overset{\circ}{n}\right)^K = \overset{\circ}{n}$
6. $\left(\overset{\circ}{n} + r\right)^K = \overset{\circ}{n} + r^K$

$(k \in Z^+)$ $\qquad$ $(k \in Z^+)$

7. $(\overset{o}{n}+r_1)(\overset{o}{n}+r_2)=\overset{o}{n}+r_1\cdot r_2$

II. Si: $N=\overset{o}{a};\ \overset{o}{b};\ \overset{o}{c};\ \ldots;\ \overset{o}{w}$ entonces:

$$N=\overset{o}{\overline{MCM(a\ ,\ b\ ,\ \ldots\ ,\ w)}}$$

III. Sea $A\cdot B=\overset{o}{n}$; si A y n no tienen divisores comunes, excepto la unidad (primos entre sí) entonces:

$$\boxed{B=\overset{o}{n}}$$

ECUACIÓN DIOFÁNTICA LINEAL: Es una ecuación algebráica cuyas variables son enteras:

$$\boxed{Ax \pm By = C}$$

Ejemplo: Al resolver la ecuación 4x + 3y = 12, encontraremos infinidad de soluciones, como pares ordenados y todos ellos son parte integrante de una recta o linea.

RESTOS POTENCIALES: Son los diversos residuos que se obtienen al dividir las diferentes potencias de una misma base entre un cierto número llamado módulo.

Ejemplo: Calcule los restos potenciales de la base 10, respecto al módulo 7.

$$\boxed{10^n=\overset{o}{7}+r} \quad n \in N$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8....
r	1	3	2	6	4	5	1	3	2....

Observamos que: $10^6=\overset{o}{7}+1$ y que en total hay 6 residuos diferentes: {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5} a dicha cantidad se le llama gaussiano.

$$10^{gaussiano}=\overset{o}{7}+1$$

CRITERIOS DE LA DIVISIBILIDAD

Son ciertas reglas prácticas que aplicados a las cifras de un numeral permiten determinar su divisibilidad respecto a un cierto número.

PRINCIPALES CRITERIOS:

Divisibilidad por 2 y potencias de 2

$$\begin{array}{lcr} \overline{abcd}=\overset{o}{2} & \Leftrightarrow & d=\overset{o}{2} \\ \overline{abcd}=\overset{o}{4} & \Leftrightarrow & \overline{cd}=\overset{o}{4} \\ \overline{abcd}=\overset{o}{8} & \Leftrightarrow & \overline{bcd}=\overset{o}{8} \end{array}$$

Divisibilidad por 3 y 9

$$\begin{array}{lcr} \overline{abcd}=\overset{o}{3} & \Leftrightarrow & a+b+c+d=\overset{o}{3} \\ \overline{abcd}=\overset{o}{9} & \Leftrightarrow & a+b+c+d=\overset{o}{9} \end{array}$$

Divisibilidad por 5, 25 y 125

$$\begin{array}{lcr} \overline{abcde}=\overset{o}{5} & \Leftrightarrow & e=5 \text{ ó } 0 \\ \overline{abcde}=\overset{o}{25} & \Leftrightarrow & \overline{de}=\overset{o}{25} \\ \overline{abcde}=\overset{o}{125} & \Leftrightarrow & \overline{cde}=\overset{o}{125} \end{array}$$

Divisibilidad por 11

$$\overset{+-+-+}{\overline{abcde}}=\overset{o}{11} \Leftrightarrow a-b+c-d+e$$

Divisibilidad por 7

$$\underset{-\quad +}{\overset{231231}{\overline{abcdef}}}=\overset{o}{7} \Leftrightarrow -2a-3b-c+2d+3e+f=\overset{o}{7}$$

Divisibilidad por 13

$$\underset{+\quad -\quad +}{\overset{431431}{\overline{abcdef}}}=\overset{o}{13} \Leftrightarrow 4a+3b-c-4d-3e+f=\overset{o}{13}$$

Divisibilidad por 33 y 99

$$\overset{1\,(10)\,1\,(10)\,1}{\overline{a\,b\,c\,d\,e}} = \overset{\circ}{33} \Leftrightarrow a + 10b + c + 10d + e = \overset{\circ}{33}$$

$$\overset{1\,(10)\,1\,(10)\,1}{\overline{a\,b\,c\,d\,e}} = \overset{\circ}{99} \Leftrightarrow a + 10b + c + 10d + e = \overset{\circ}{99}$$

Divisibilidad por 17

Un número es divisible por 17 si al tomar la última cifra de la derecha multiplicada por 5 y restar esta cantidad al número que resulta de quitar dicha cifra el resultado es cero o un múltiplo de 17.

Divisibilidad por 19

Un número es divisible por 19 cuando, separando la primera cifra de la derecha y multiplicándola por 2, sumando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente da 19 o múltiplo de 19.

Divisibilidad por 23

Un número es divisible por 23 si al quitar su última cifra (de las unidades), la suma del número resultante y 7 veces esa última cifra es 23 o múltiplo de 23.

Divisibilidad por 29

Un número es divisible por 23 si al quitar su última cifra (de las unidades), la suma del número resultante y 7 veces esa última cifra es 23 o múltiplo de 23.

COMPLEMENTOS

DIVISIBILIDAD EN OTRA BASE:

$\overline{abcde}_{(n)} = \overset{\circ}{k}$; por restos potenciales:

Base n: $n^0 \quad n^1 \quad n^2 \quad n^3 \quad n^4 \quad ......$

Módulo k: $r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \quad ......$

Entonces se cumple:

$$r_4a + r_3b + r_2c + r_1d + e = \overset{\circ}{k}$$

DIVISIBILIDAD POR (n + 1) EN BASE n:

$$\overset{-+-+}{\overline{abcd}}_{(n)} = \overset{\circ}{\overline{(n+1)}} \Leftrightarrow -a+b-c+d = \overset{\circ}{\overline{(n+1)}}$$

DIVISIBILIDAD POR (n − 1) EN BASE n:

$$\overline{abcd}_{(n)} = \overset{\circ}{\overline{(n-1)}} \Leftrightarrow a+b+c+d = \overset{\circ}{\overline{(n-1)}}$$

PROPIEDAD:

$$\overline{abcde}_n = \begin{cases} \overset{\circ}{n} + e \\ \overset{\circ}{\overline{n^2}} + \overline{de}_n \\ \overset{\circ}{\overline{n^3}} + \overline{cde}_n \\ \overset{\circ}{\overline{n^4}} + \overline{bcde}_n \\ \vdots \end{cases}$$

CONGRUENCIA:

Dos números a y b son congruentes respecto al módulo m si al dividir a y b entre m el resto es el mismo.

Ejemplo:
17 y 32 son congruentes respecto al módulo 5 porque:

$$17 = \overset{\circ}{5} + 2 \quad ; \quad 32 = \overset{\circ}{5} + 2$$

Notación:

$$a \equiv b(m) \quad \text{ó} \quad a \equiv b(\text{mod } m)$$

Se verifica: $a - b = \overset{\circ}{m}$

Aritmética

CONCEPTOS PRELIMINARES

Abogado de profesión, matemático aficionado, nació en la ciudad de Beaumont-de-Lomange el 17 de agosto del 1601.

Pierre Fermat hizo Importante:s aportes a la matemática, como por ejemplo en Geometría Analítica. El cálculo de probabilidades, el cálculo infinitesimal y la aritmética.

Sus investigaciones se conocen, fundamentalmente, debido al intercambio de notas que mantuvo con matemáticos de la época, tales como Blaise Pascal (1623-1662); René Descartes (1596-1650); M. Mersenne entre otros.

Cabe destacar una carta dirigida a Pierre de Carcavi (1600-1684) en la que expone sumariamente lo que el consideraba Importante:, como por ejemplo el método del "descenso infinito".

En 1679, su hijo mayor Clement-Samuel recopiló y publicó sus obras y cartas de su padre.

En la copia de Bachet del libro de Diofanto, en la parte del mismo donde se plantea el problema de hallar cuadrados que son sumas de dos cuadrados, Fermat escribió.

> "Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitud ultra quadratum potestatem in duos eje dem nominis fase est dividere: cufus rei demostrationem mirabilem sane detexi. Han marginis non carpet".

Que traducido señala:

> "Por otra parte, es imposible para un cubo ser suma de dos cubos, para una cuarta potencia ser suma de dos cuartas potencias o en general para un número que es potencia mayor que dos, ser suma de dos números que son de esta misma potencia. He descubierto una demostración maravillosa de esta afirmación imposible de escribir en este estrecho margen".

Simbólicamente, esa proposición, hoy llamada EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT establece que si "n" es un número natural mayor que dos, no existen números naturales x, y, z que satisfacen la ecuación:

$$x^n + y^n = z^n$$

Pierre Fermat falleció en la ciudad de Castres el 12 de enero de 1665.

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

Al considerar los enteros positivos, observamos que la unidad es el único número que tiene un solo divisor, los demás números tienen dos o más divisores; según esto daremos las siguientes definiciones:

1. **NÚMERO PRIMO:** Es aquel número entero positivo que posee sólo dos divisores: la unidad y el mismo número.

   Ejemplo:
   3 es un número primo debido a que tiene sólo dos divisores: 1 y 3.
   Son números primos: 2; 3; 5; 7; 11; 13; ......

2. **NÚMERO COMPUESTO:** Es aquel número entero positivo que tiene más de dos divisores.

Ejemplo:
6 es un número compuesto debido a que tiene más de dos divisores: 1 , 2 , 3 y 6.

3. **NÚMERO SIMPLE:** Es aquel número entero positivo que no tiene más de dos divisores.

4. **NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ (PESI):** Son aquellos que tienen como único divisor común a la unidad. A dichos números, también se les llama primos relativos o coprimos.

5. **DIVISOR PROPIO:** Son todos los divisores de N, menores que N.

   Ejemplo: Los divisores propios de 12 son: 1, 2, 3, 4 y 6.

PROPIEDADES

* La sucesión de números primos es infinita.
* El único número primo par es 2.
* Si N es un número primo mayor que 3, entonces N es $\overset{o}{6} \pm 1$.
* Varios números consecutivos son PESI.
* Si un número primo absoluto no está contenido en un número compuesto, ambos son PESI.

Importante:

1. El único número primo par es dos.
2. Averigüar qué es un número perfecto, un número abundante, número defectuoso y números amigos.

Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número entero positivo se puede descomponer como el producto de potencias de sus factores primos, esta descomposición es única y se conoce como descomposición canónica.

Ejemplo:
Descomponer canónicamente el número: 360.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$\Rightarrow$

$$360 = \underbrace{2\times2\times2}\times\underbrace{3\times3}\times5$$
$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

a) Tabla de Divisores:

Ejemplo: Confecciona la tabla de divisores de 120.

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

	2^0	2^1	2^2	2^3 ← Divisores de 2^3
1				
3	3	6	12	24
5	5	10	20	40
	15	30	60	120

Los divisores de 120 son:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.
$\Rightarrow$ 120 tiene 16 divisores.

* Cantidad de Divisores de un Número:

Sea $N = a^m \cdot b^n \cdot c^p$ la descomposición canónica de N; podemos calcular la cantidad de divisores de N sin necesidad de hacer la tabla de divisores, utilizando la siguiente fórmula:

$$\boxed{CD(N) = (m+1)(n+1)(p+1)}$$

Ejemplo:
Calcule la cantidad de divisores de 120.

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$
$$\Rightarrow CD(120) = \underbrace{(3+1)}_{4}\underbrace{(1+1)}_{2}\underbrace{(1+1)}_{2} = 16$$

Obs. También se cumple:

$$\boxed{CD(N) = CD(primos) + CD(compuestos) + 1}$$

Aritmética

* **Suma de los Divisores de un Número:**

$$\boxed{SD(N)=\left(\frac{a^{m+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right)\left(\frac{c^{p+1}-1}{c-1}\right)}$$

Ejemplo:
Calcule la suma de los divisores de 120.

$$120=2^3\times3^1\times5^1$$

$$SD(120)=\left(\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{1+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^{1+1}-1}{5-1}\right)=360$$

* **Producto de los Divisores de un Número:**

$$\boxed{PD(N)=\sqrt{N^{CD(N)}}}$$

Ejemplo:
Calcule el producto de los divisores de 120 como CD(120) = 16.

$$\Rightarrow PD(120)=\sqrt{120^{16}}=120^8$$

* **Suma de las inversas de los divisores de N:**

$$\boxed{SID(N)=\frac{SD(N)}{N}}$$

Ejemplo:
Calcule la suma de las inversas de los divisores de 120.

$$SID(120)=\frac{SD(120)}{120}=\frac{360}{120}=3$$

INDICADOR DE UN NÚMERO O FUNCIÓN EULER $\varphi_{(N)}$

La cantidad de números menores o iguales que N y PESI con N se puede calcular utilizando:

$$\boxed{\phi_{(N)}=a^{m-1}(a-1)b^{n-1}(b-1)c^{p-1}(c-1)}$$

que también se puede escribir:

$$\boxed{\phi_{(N)}=a^mb^nc^p\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)}$$

Ejemplo:
¿Cuántos números menores o iguales que 12 son primos relativos con 12?

$$\underbrace{1,5,7,11}_{4\ \text{números}}$$

Esta cantidad se puede calcular usando la función de Euler.

Como: $12=2^2\times3^1$

$$\phi_{(12)}=\underbrace{2^{2-1}}_{2}\underbrace{(2-1)}_{1}\underbrace{3^{1-1}}_{1}\underbrace{(3-1)}_{2}=4$$

o también:

$$\phi_{(12)}=\underbrace{2^2}_{4}\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}}\underbrace{3^1}_{3}\underbrace{\left(1-\frac{1}{3}\right)}_{\frac{2}{3}}=4$$

TEOREMAS ADICIONALES

TEOREMA DE WILSON: Si p es un número primo.

$$\boxed{(p-1)!=\overset{o}{p}-1}$$

Ejemplo:

$$(5-1)!=\overset{o}{5}-1$$

TEOREMA DE EULER: Si a y b son PESI:

$$\boxed{a^{\phi(b)}=\overset{o}{b}+1}$$

Ejemplo:
Sea a = 3 y b = 8
Se cumple:

$$\underbrace{3^{\phi(8)}}_{3^4}=\overset{o}{8}+1$$
$$3^4=\overset{o}{8}+1$$

TEOREMA DE FERMAT: Si a y p son PESI y p es un número primo.

$$\boxed{a^{p-1}=\overset{o}{p}+1}$$

Ejemplo: Sea a = 4 y p = 3 se cumple:

$$\underbrace{4^{3-1}}_{4^2}=\overset{o}{3}+1$$
$$4^2=\overset{o}{3}+1$$

Capítulo XVII: Máximo Común Divisor y Mínimo Común Múltiplo

CONCEPTOS PRELIMINARES

Al considerar el conjunto de los enteros positivos, una de las partes de la Teoría de Números, es el cálculo del M.C.D. y el M.C.M. de varios números. Se sabe que ya antes de nuestra era, Euclides aportaba (en su obra Elementos) el algoritmo de la división que nos da la obtención del M.C.D.
Este algoritmo tiene su aplicación en las fracciones continuas.

NOCIONES PRELIMINARES

I. DIVISOR COMÚN: Se llama divisor común de un conjunto de números enteros, a aquel número entero positivo que se encuentra contenido en todos ellos una cantidad entera y exacta de veces.

Ejemplo:
Los divisores de 12 ; 18 y 30 son:
D(12) = {1; 2; 3; 4; 6; 12}
D(18) = {1; 2; 3; 6 ; 9; 18}
D(30) = {1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30}
Como Ud. observará los divisores comunes son:

1; 2; 3 y 6

Entonces llamaremos Máximo Común Divisor al mayor de los divisores comunes. En consecuencia el M.C.D. (12; 18; 30) = 6

* **MCD:** El Máximo Común Divisor de dos o más números enteros (por lo menos uno distinto de cero) cumple dos condiciones.
i) Es un divisor común positivo.
ii) Es el mayor posible
Ejemplos:
M.C.D (8 ; 12) = 4
M.C.D (− 8 ;12) = 4
M.C.D (8 ; − 12) = 4
M.C.D (− 8 ; − 12) = 4

Observación:
* MCD(0 ; 0) no existe
* MCD (a ; 0) = |a| , $a \neq 0$

Teorema: Si a y b son enteros, no ambos cero, entonces el MCD de a y b es el menor entero positivo que puede ser expresado como una función lineal homogénea de a y b.

$$MCD\ (a\ ;\ b) = xa + yb$$

Donde: x , y enteros.

Importante:

Sean A y B dos enteros si el M.C.D (A;B) = d

Entonces: $A = \overset{o}{d} \quad \wedge \quad B = \overset{o}{d}$

II. MÚLTIPLO COMÚN: Es aquel entero que contiene a otro un número entero y exacto de veces.

Ejemplo:
Los múltiplos positivos de 6 y 9 son:

$\overset{o}{6} = \{6; 12; \mathbf{18}; 24; 30; \mathbf{36}; ...\}$

$\overset{o}{9} = \{9; \mathbf{18}; 27; \mathbf{36}; 45; ...\}$

Los múltiplos comunes a 6 y 9 son:
{18; 36; 54; ....}

Entonces se llama Mínimo Común Múltiplo al menor de los múltiplos comunes positivos.
En consecuencia el M.C.M (6 ; 9) = 18

NOTA:

* Los divisores del M.C.D. de varios números, son los divisores comunes de estos números.
* Los múltiplos comunes a varios números, son los múltiplos del M.C.M. de aquellos números.

MÉTODOS PARA CALCULAR EL M.C.D. Y M.C.M.

1. **Por descomposición simultánea**
   Se colocan los números uno a la derecha del otro y luego se traza una línea vertical, comenzando a extraer los factores primos comunes, cuando los números no contengan factores comunes, o sea, sean P.E.S.I. el producto de dichos factores comunes será el M.C.D. Para el M.C.M. se sigue extrayendo los factores no comunes hasta que quede la unidad y el producto de los factores primos comunes y no comunes será el M.C.M.

2. **Por descomposición canónica:**
   El M.C.D. de varios números viene a ser el producto de los factores primos comunes elevados a su menor exponente; mientras que el M.C.M. viene a ser el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados a su mayor exponente.

3. **Por divisiones sucesivas (Algoritmo de Euclides)**

   El algoritmo de Euclides es un método antiguo y eficiente para calcular el máximo común divisor (MCD). Fue originalmente descrito por Euclides en su obra Elementos. El algoritmo de Euclides extendido es una ligera modificación que permite además expresar al máximo común divisor como una combinación lineal.

   Fundamento Teórico:

   En toda división inexacta el M.C.D. del dividendo y el divisor es numéricamente igual al M.C.D. del divisor y el residuo que origina esta división:

   $$\begin{array}{l|l} A & \underline{B} \\ r & q \end{array} \qquad \boxed{\text{M.C.D. } (A , B) = \text{M.C.D. } (B , r)}$$

   Procedimiento:
   Dados dos enteros A y B con A > B

	q_1	q_2	q_3	$\cdots$		q_{n-1}	q_n	→ Cocientes
A	B	r_1	r_2	$\cdots$		r_{n-2}	r_{n-1}	→ M.C.D
r_1	r_2	r_3		$\cdots$		0		→ Residuos

PROPIEDADES DEL M.C.D Y M.C.M

1. Si varios números son P.E.S.I. el M.C.D. de ellos es igual a la unidad.

2. Si a varios números los multiplicamos o dividimos por un mismo número entero, el M.C.D. y el M.C.M. de ellos quedarán multiplicados o divididos por dicho entero.

3. Si a varios números los dividimos entre su M.C.D. los cocientes obtenidos serán P.E.S.I.

4. El producto de 2 números será siempre igual al producto del M.C.D. y el M.C.M. de aquellos números.

5. Si un conjunto de enteros se reemplazan dos o más de ellos por su M.C.D. o su M.C.M. entonces el M.C.D. o el M.C.M. del conjunto de dichos enteros no se altera.

6. Si un número es múltiplo de otros, será múltiplo del M.C.M. de aquellos números.

7. Si el M.C.D.(a, b)=d y el M.C.M.(a, b)=m, luego el MCD $(a^n , b^n) = d^n$ y el MCM $(a^n , b^n) = m^n$

8. Sean los números $N = a^p - 1$ y $M = a^q - 1$.
   Entonces el MCD $(N;M) = a^{MCD(p\,;\,q)} - 1$

CONCEPTOS PRELIMINARES

Ya hemos visto en división exacta para números enteros, la condición necesaria para que el dividendo sea múltiplo del divisor. Pero en el caso de existir divisiones como: $(11) \div (-5)$, los matemáticos trataron de solucionarlas creando una nueva clase de números, llamados números fraccionarios.

Nuestra escritura decimal es consecuencia directa de la utilización de las fracciones decimales (denominador potencia de 10) cuyo defensor fue Francois Viete (1540-1603), aunque fue Simón Stevin quien en 1585 explicó con todo detalle y de manera muy elemental la utilización de las fracciones decimales.

En 1616, en una obra del escocés John Napier, los números decimales aparecen tal como lo escribimos hoy, con punto decimal para separar la parte entera de la decimal, aunque en algunos países la coma se sustituye por el punto.

NÚMERO RACIONAL

Es aquel número que puede expresarse como: $\frac{a}{b}$ donde $a \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad b \in \mathbb{Z}^*$

El conjunto de los números racionales se denota con la letra Q y se define de la siguiente manera:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \ \wedge \ b \in \mathbb{Z}^* \right\} \ ; \ \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$$

Ejemplos:

$$\frac{4}{3}; \ \frac{7}{-3}; \ \frac{12}{6}; \ \frac{0}{4}; \ \frac{16}{10}; \ \ldots$$

NÚMERO FRACCIONARIO

Es aquel número racional que no es entero.

Ejemplos:

$$\frac{2}{5}; \ \frac{-3}{4}; \ \frac{1}{7}; \ \frac{23}{-2}; \ \ldots$$

FRACCIÓN

Una fracción es un número fraccionario de <u>términos positivos</u>.

Ejemplos:

$$\frac{2}{5}; \ \frac{7}{9}; \ \frac{4}{8}; \ \ldots$$

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES

Sea la fracción $f = \frac{A}{B}$ $\quad (B \neq 0)$

Recuerde A y B $\in \mathbb{Z}^+$

I. Por la comparación de sus términos:

a) Propia: $\frac{A}{B}$ es propia $\leftrightarrow A < B$

Su valor es menor que la unidad

Ejemplos:

$$\frac{3}{5}; \ \frac{7}{1000}; \ \frac{1}{2597}$$

b) Impropia: $\frac{A}{B}$ es impropia $\leftrightarrow A > B$

Su valor es mayor que la unidad.

Ejemplos:

$$\frac{5}{2}; \ \frac{8}{3}; \ \frac{125}{7}$$

Observación:

Una fracción impropia $\frac{A}{B}$ puede convertirse a número mixto efectuando la división entera:

$$\begin{array}{l|l} A & B \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow \text{La número mixto es : } q\,\frac{r}{B}$$

Ejemplo:

$$\frac{15}{7} \text{ es } 2\frac{1}{7}$$

Porque: $\begin{array}{l|l} 15 & 7 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$

Toda número mixto $q\frac{r}{B}$ se puede expresar como: $q+\frac{r}{B}$

$$\boxed{q\frac{r}{B} = q + \frac{r}{B}}$$

II. Por su denominador:

a) Decimal: Cuando el denominador es una potencia de 10.

Ejemplos:

$$\frac{1}{100};\ \frac{3}{10};\ \frac{8}{1000}$$

b) Ordinaria: Cuando el denominador no es una potencia de 10.

Ejemplos:

$$\frac{3}{7};\ \frac{4}{6};\ \frac{5}{2}$$

III. Por grupos de fracciones:

a) Homogéneas: Cuando todas las fracciones de un grupo tienen el mismo denominador.

Ejemplo:

Las fracciones $\frac{5}{7}; \frac{9}{7}; \frac{11}{7}$ son homogé-neas

b) Heterogéneas: Cuando todas las fracciones de un grupo no tienen el mismo denominador.

Ejemplos:

$$\frac{5}{8};\ \frac{7}{4};\ \frac{5}{6}$$

IV. Por los divisores comunes de sus términos:

a) Reductibles: $\frac{A}{B}$ es reductible $\leftrightarrow$ A y B no son PESI.

Ejemplos:

$$\frac{20}{15};\ \frac{15}{75};\ \frac{80}{30}$$

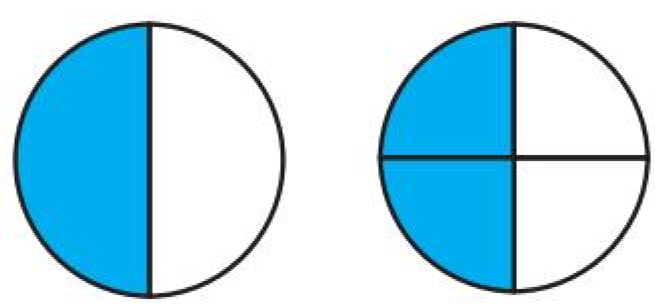
b) Irreductible: $\frac{A}{B}$ es irreductible $\leftrightarrow$ A y B son PESI.

Ejemplos:

$$\frac{7}{5};\ \frac{6}{11};\ \frac{12}{25}$$

FRACCIONES EQUIVALENTES

Son aquellas fracciones que tienen el mismo valor; por ejemplo:



$$\frac{1}{2} \quad < \quad > \quad \frac{2}{4}$$

SIMPLIFICACIÓN DE UNA FRACCIÓN

Sea $f = \frac{A}{B}$ ¡Simplificar!

Bueno, primero calculemos al M.C.D. de A y B entonces:

$$f_I = \frac{\dfrac{A}{M.C.D.(A,B)}}{\dfrac{B}{M.C.D.(A,B)}} = \frac{b}{q} > \text{PESI}$$

AMPLIACIÓN DE UNA FRACCIÓN

Sea $f=\frac{p}{q}$ irreductible, la fracción equivalente se obtiene: $f_e=\frac{pK}{qK}$ con $K\in\mathbb{Z}^+$.

Ejercicio: Obtener las fracciones equivalentes a $\frac{559}{731}$, cuyos términos son menores que 1000.

Propiedades

1. Si a ambos términos de una fracción propia se le agrega una misma cantidad positiva, la fracción resultante es mayor que la original.

2. Si a ambos términos de una fracción impropia se le agrega una misma cantidad positiva, la fracción resultante es menor que la original.

3. Sea $f_1=\frac{a}{b}$ y $f_2=\frac{c}{d}$ entonces:

   i) $f_1>f_2 \leftrightarrow a\cdot d>b\cdot c$

   ii) $f_1<f_2 \leftrightarrow a\cdot d<b\cdot c$
   $\forall$ a, b, c y d $\in \mathbb{Z}^+$

4. Si la suma de dos fracciones irreductibles resulta un número entero, entonces sus denominadores son iguales.

FRACCIONES CONTINUAS

Una expresión de la forma:

$a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+.....}}$ se denomina fracción continua.

Fracción Continua Simple: Es aquella fracción continua de la forma:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+......}}$$

La cual representaremos como:

$$[a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3\ ;\ ....]$$

Ejemplo:

$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}$ se representa [2 ; 3 ; 4 ; 5].

M.C.D. y M.C.M. para fracciones

Sean $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ fracciones irreductibles.

I. $\text{M.C.D.}=\dfrac{\text{M.C.D.}(a\ ,\ c\ ,\ e)}{\text{M.C.M.}(b\ ,\ d\ ,\ f)}$

II. $\text{M.C.M.}=\dfrac{\text{M.C.M.}(a\ ,\ c\ ,\ e)}{\text{M.C.D.}(b\ ,\ d\ ,\ f)}$

Ejemplo: Encuentre el M.C.D. y el M.C.M. de $\frac{27}{35}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{18}{50}$.

NÚMEROS DECIMALES

Números decimales es la expresión en forma lineal de una fracción, que se obtiene dividiendo el numerador entre el denominador de una fracción irreductible.

Así, tenemos:

* $\frac{4}{5}=0{,}8$
* $\frac{2}{3}=0{,}666....$
* $\frac{7}{6}=1{,}1666....$

Clases de Números Decimales

Los números decimales se clasifican en 2 grandes grupos: números decimales limitados o exactos, e ilimitados o inexactos.

$$\text{Número Decimal}\begin{cases}\text{Dec. Exacto}\\ \text{Dec. Inexacto}\begin{cases}\text{Periódico Puro}\\ \text{Periódico Mixto}\end{cases}\end{cases}$$

a) Decimal Exacto

Si el número tiene una cantidad limitada de cifras decimales.

Aritmética

Origen: Una fracción irreductible dará origen a un decimal exacto cuando el denominador esté conformado por sólo factores 2, factores 5 o ambos.

Observación: El número de cifras decimales de un decimal exacto estará dado por el mayor exponente de 2 ó 5 que tenga el denomina-dor de la fracción irreductible.

Ejemplo:
De las fracciones anteriores notamos que son fracciones irreductibles y además generan:

* $\frac{7}{25} = \frac{7}{5^2} = 0{,}28$ (2 cifras decimales)
* $\frac{11}{8} = \frac{11}{2^3} = 1{,}375$ (3 cifras decimales)
* $\frac{9}{40} = \frac{9}{5 \cdot 2^3} = 0{,}255$ (3 cifras decimales)

Conversión de decimal exacto a fracción:

Fracción Generatriz
La fracción generatriz de un decimal exacto será igual al número formado por las cifras decimales, dividida entre la unidad, seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número decimal.

Ejemplo:

$$\boxed{0{,}abcd = \frac{\overline{abcd}}{10000}}$$

b) Decimal Inexacto
Son números decimales inexactos aquellos que tienen una cantidad de cifras decimales ilimitada.

b.1 D.I. Periódico Puro: Se dice que es Periódico Puro cuando la parte decimal consta de una cifra o un grupo de cifras que se repetirá indefinidamente (a estas cifras que se repiten se les denomina periodo) y se las indica con un arco encima.

Origen: Una fracción irreductible originará un decimal Periódico Puro cuando el denominador sea diferente de un múltiplo de 2 y/o múltiplo de 5.

Ejemplos:

* $\frac{2}{3} = 0{,}666... = 0{,}\widehat{6}$
* $\frac{10}{11} = 0{,}9090... = 0{,}\widehat{90}$
* $\frac{35}{27} = 1{,}296296... = 0{,}\widehat{296}$

El número de cifras del periodo está dado por la cantidad de cifras del menor número formado por cifras 9 que contengan exactamente al denominador de la fracción generatriz.

Ejemplos:

$\frac{2}{3} = 0{,}\widehat{6}$ $\begin{cases}\text{Al denominador lo contiene "99"} \\ \text{(dos nueves), entonces el periodo} \\ \text{tiene dos cifras.}\end{cases}$

$\frac{10}{11} = 0{,}\widehat{90}$ $\begin{cases}\text{Al denominador lo contiene "99"} \\ \text{(dos nueves), entonces el periodo} \\ \text{tiene dos cifras.}\end{cases}$

Descomposición Canónica de los números de cifras 9

Para un fácil manejo del cálculo del número de cifras de un decimal periódico puro, es recomendable recordar la siguiente tabla:

$$\begin{aligned} 9 &= 3^2 \\ 99 &= 3^2 \cdot 11 \\ 999 &= 3^3 \cdot 37 = 27 \cdot 37 \\ 9999 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 101 \\ 99999 &= 3^2 \cdot 41 \cdot 271 \\ 999999 &= 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \end{aligned}$$

Conversión de D.I. Periódico Puro a fracción:

Fracción Generatriz

La fracción generatriz de un D.I. Periódico Puro está dado por el número formado por las cifras del periodo, dividido entre tantos nueves como cifras tenga el periodo.

Sea: $0,\widehat{abc}$ entonces:

$$\boxed{0,abcd = \frac{\overline{abcd}}{10000}}$$

b.2. D. I. Periodo Mixto: Una expresión decimal es periódica mixta cuando después de la coma decimal el periodo se inicia después de una cifra o grupos de cifras. Al grupo inicial anterior al periodo se le llama parte no periódica.

Ejemplos:

* $0,8333... = 0,8\hat{3}$
* $1,59090... = 1,5\widehat{90}$

Origen: Una fracción irreductible dará origen a un decimal inexacto periódico mixto cuando al descomponer el denominador en sus factores primos se encuentran potencias de 2 y/o 5 y además, algún otro factor necesariamente diferente:

Ejemplos:

* $\frac{7}{44} = \frac{7}{2^2 \times 11} 0,590590... = 0,1\widehat{590}$
* $\frac{95}{148} = \frac{95}{2^2 \times 37} = 0,64189189... = 0,64\widehat{189}$

La cantidad de cifras no periódicas del decimal inexacto periódico mixto está dado por la regla para el número de cifras decimales de un decimal exacto, y el número de cifras del periodo está dado por la regla del número de cifras de un D.I. Periódico Puro.

Ejemplos:

$$\frac{95}{148} = \frac{95}{2^2 \times 37} = 0,64\widehat{189}$$

El denominador, el exponente del factor 2 que es "2" genera 2 cifras no periódicas y el factor 37 está contenido por 999 (tres "9") por lo que genera 3 cifras periódicas.

Conversión de un D.I. Periódico Mixto a fracción:

Fracción Generatriz

La fracción generatriz de un D.I.P. Mixto estará dado por el número formado por la parte no periódica, seguida de la parte periódica, menos la parte no periódica, todo entre el número formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguido de tantos ceros como cifras tengan la parte no periódica.

Ejemplo:

0,29545454...

$$0,29\widehat{54} = \frac{2954 - 29}{9900} = \frac{2925}{9900} = \frac{13}{44}$$

Observe **dos nueves** y **dos ceros**.

Aritmética


Academia
Raimondi
... siempre los primeros
Informes e Inscripciones:
Plaza San Francisco N° 138
Telf.: 247458 y 224961
Cusco
www.academiaraimondi.pe
You
Tube